C. NĂSTĂSESCU
C. NIȚĂ
GH. RIZESCU

ALGEBRĂ

IX

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

C. NĂSTĂSESCU C. NIŢĂ GH. RIZESCU

IX

Matematică

Algebră

Manual pentru clasa a IX-a



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — BUCUREŞTI

CAPITOLUL I

ECUAŢII DE GRADUL ÎNTÎI ŞI DE GRADUL AL DOILEA (RECAPITULARE)

§1. ECUAŢII ŞI INECUAŢII DE GRADUL ÎNTÎI

1.1. Forma generală a *ecuaţiei de gradul întîi* **este**

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

a, b fiind numere reale.

Observaţie. În practică vom considera şi ecuaţii a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unor ecuaţii de gradul întîi.

Ecuaţia (1) are rădăcina $-\frac{b}{a}$.

Interpretarea geometrică (fig.I.1). Graficul funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, este o dreaptă care intersectează axa Ox în punctul de abscisă $-\frac{b}{a}$ $\left(-\frac{b}{a}\right.$ fiind rădăcina ecuaţiei $\left.ax + b = 0\right)$. În figura I.1 am construit graficul pentru cazul : $a > 0$ şi $b > 0$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia în x,

$$m - x = 1 - m^2x. \tag{2}$$

Această ecuaţie devine

$$(m^2 - 1)x = 1 - m.$$

Dacă $m^2 - 1 \neq 0$, adică $m \neq 1$ şi $m \neq -1$, atunci ecuaţia (2) este de gradul întîi, avînd rădăcina

$$\frac{1 - m}{m^2 - 1}, \text{ adică } -\frac{1}{m + 1}.$$

Dacă $m = 1$, ecuaţia (2) devine

$$0 \cdot x = 0$$

care este adevărată pentru orice număr real x.

Dacă $m = -1$, se obţine

$$0 \cdot x = 2,$$

care nu este verificată pentru nici o valoare a lui x.

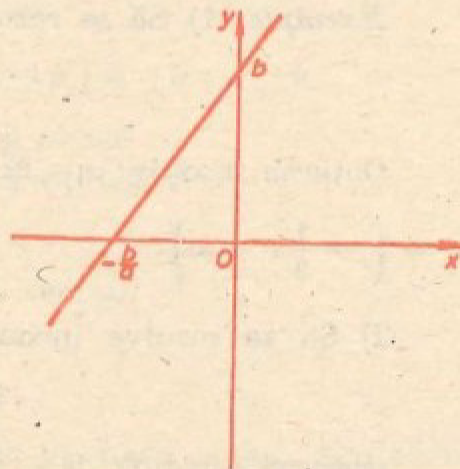


Fig. I.1

1.2. Inecuațiile de forma

$$ax + b > 0,\ \ ax + b \geqslant 0,\ \ ax + b < 0 \text{ sau } \ ax + b \leqslant 0,$$

unde a și b sînt numere reale date, iar $a \neq 0$, se numesc *inecuații de gradul întîi.*

Observație. În practică vom considera orice inecuație care se reduce, folosind proprietățile inegalităților, la o inecuație de gradul întîi.

1. Să considerăm inecuația de gradul întîi

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0. \tag{3}$$

1° Dacă $a > 0$, atunci $x > -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

2° Dacă $a < 0$, atunci $x < -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.

Grafic, cele două situații sînt reprezentate în figura I.2, respectiv în figura I.3, porțiunile hașurate marcînd mulțimea soluțiilor.

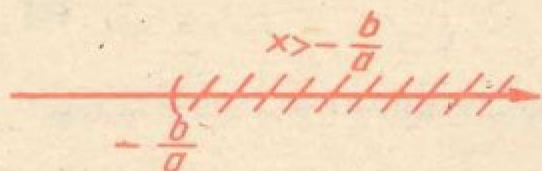


Fig. I.2

2. Pentru inecuația $ax + b \geqslant 0$, avem:

1° Dacă $a > 0$, atunci $x \geqslant -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.

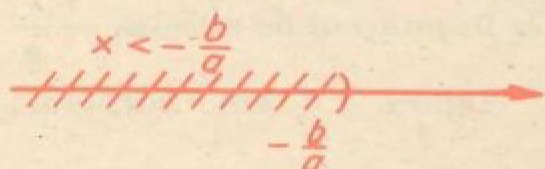


Fig. I.3

2° Dacă $a < 0$, atunci $x \leqslant -\frac{b}{a}$, adică $x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$.

Observăm că punctul $-\frac{b}{a}$ face parte din mulțimea soluțiilor.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația

$$x + 4 > -2x + 3.$$

Obținem succesiv: $x + 2x > -4 + 3$, sau $3x > -1$, de unde $x > -\frac{1}{3}$. Deci $x \in \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

2) Să se rezolve inecuația

$$4(6 - x) \geqslant 3(x - 13).$$

Obținem succesiv: $24 - 4x \geqslant 3x - 39$, sau $-4x - 3x \geqslant -39 - 24$, de unde $-7x \geqslant -63$, adică $x \leqslant 9$. Deci $x \in (-\infty, 9]$.

1.3. Ecuații care conțin necunoscuta în modul

Valoarea absolută a unui număr a, notată prin $|a|$, se definește astfel:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0, \\ 0, \text{ dacă } a = 0, \\ -a, \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

De *exemplu*: $|9| = 9$, $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$, $|-30| = 30$, $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ etc.

Valoarea absolută a numărului a se mai numește *modulul* numărului a. Rezultă că $|x| = \max(-x, x)$ și deci: $x \leqslant |x|$, $-x \leqslant |x|$, ($\max(-x, x)$ fiind cel mai mare dintre numerele $-x$ și x).

Să menționăm proprietățile fundamentale ale modulului.

Dacă a și b sînt numere, atunci:

1. $|a| \geqslant 0$;
2. $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$;
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$;
4. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Primele trei proprietăți sînt evidente, după definiția modulului.

Să o demonstrăm pe ultima. Într-adevăr, dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci este clar că $|a + b| = |a| + |b|$. Deci să presupunem $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Să considerăm cele patru cazuri posibile:

i) Dacă $a > 0$ și $b > 0$, atunci $a + b > 0$. Deci $|a + b| = |a| + |b|$.

ii) Dacă $a < 0$ și $b < 0$, atunci $a + b < 0$. În acest caz $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|a + b| = -(a + b)$ și deci $|a + b| = |a| + |b|$.

iii) Dacă $a > 0$ și $b < 0$, atunci $|a| = a$ și $|b| = -b$. În această situație avem, sau $a + b \geqslant 0$, sau $a + b < 0$. Dacă $a + b \geqslant 0$, atunci

$$|a + b| = a + b \leqslant a = |a| \leqslant |a| + |b|;$$

iar dacă $a + b < 0$, atunci

$$|a + b| = -a - b = -a + |b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |b|.$$

iv) Analog, se demonstrează cazul $a < 0$ și $b > 0$.

În practică este foarte utilă următoarea proprietate:

5. $|a| \leqslant c$ dacă și numai dacă $-c \leqslant a \leqslant c$.

(În aceste relații se poate înlocui semnul $\leqslant$ cu semnul $<$.)

De asemenea, avem:

6. $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

Proprietățile 5 și 6 se demonstrează ușor pe baza celor precedente. Demonstrarea lor o lăsăm ca exercițiu.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuaţia

$$|x-3|=4. \quad (4)$$

După definiţia modulului avem

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, \text{ dacă } x-3 \geqslant 0, \\ -(x-3), \text{ dacă } x-3<0, \end{cases}$$

adică

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, \text{ dacă } x \geqslant 3, \\ -x+3, \text{ dacă } x<3. \end{cases}$$

Aşadar, ecuaţia (4) devine:

a) Dacă $x \geqslant 3$ avem $x-3=4$, de unde $x=7$. Cum $7>3$, rezultă că 7 este o rădăcină a ecuaţiei.

b) Dacă $x<3$ avem $-x+3=4$, de unde $x=-1$. Cum $-1<3$, rezultă că -1 este o rădăcină a ecuaţiei. Deci rădăcinile ecuaţiei (4) sînt: $x_1=7$, $x_2=-1$.

2) Să se rezolve ecuaţia

$$|6-x|=2x+3. \quad (5)$$

Avem $|6-x|=\begin{cases} 6-x, \text{ dacă } 6-x \geqslant 0, \\ -6+x, \text{ dacă } 6-x<0. \end{cases}$

Aşadar, ecuaţia (5) devine:

a) Dacă $6-x \geqslant 0$, adică $x \leqslant 6$, avem $6-x=2x+3$, de unde $x=1$. Cum $1 \leqslant 6$, rezultă că 1 este rădăcină a ecuaţiei.

b) Dacă $6-x<0$ adică $x>6$, avem $-6+x=2x+3$, de unde $x=-9$. Cum -9 nu verifică inecuaţia $x>6$, rezultă că -9 nu este rădăcină a ecuaţiei (5). Deci ecuaţia (5) are rădăcina 1.

§2. ECUAŢII DE GRADUL AL DOILEA CU RĂDĂCINI REALE

2.1. Rezolvarea ecuaţiei de gradul al doilea cu rădăcini reale

Fie ecuaţia

$$ax^2+bx+c=0, \; a \neq 0,$$

a, b, c, fiind numere reale.

O astfel de ecuaţie se numeşte *ecuaţie de gradul al doilea cu coeficienţi reali*. Se numeşte *soluţie* sau *rădăcină reală* a ecuaţiei un număr real α astfel încît să avem

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

Prin *rezolvarea* ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ se înțelege determinarea tuturor soluțiilor (rădăcinilor) acestei ecuații.

Ecuația are rădăcini reale dacă și numai dacă $b^2 - 4ac \geqslant 0$. *Dacă* $b^2 - 4ac < 0$, *ecuația nu are rădăcini reale.*

Existența rădăcinilor reale ale ecuației de gradul al doilea, precum și numărul lor depind de expresia $b^2 - 4ac$. Această expresie se numește *discriminantul* ecuației de gradul al doilea și se notează cu Δ.*

Dacă discriminantul ecuației de gradul al doilea este pozitiv, atunci ecuația are două rădăcini reale diferite între ele

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Dacă discriminantul ecuației de gradul al doilea este egal cu zero, atunci ecuația are două rădăcini reale egale

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Exemple: 1) Ecuația $2x^2 - x - 3 = 0$ are discriminantul $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 > 0$. Deci, ecuația are două rădăcini reale diferite

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{4} = \frac{3}{2};$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{4} = -1.$$

2) Ecuația $2x^2 - 4x + 2 = 0$ are discriminantul $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 0$. Această ecuație are rădăcini reale egale

$$x_1 = x_2 = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1.$$

3) Ecuația $2x^2 + x + 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$. Deci, ecuația nu are rădăcini reale.

Dăm acum cîteva forme particulare importante ale ecuației de gradul al doilea, care are discriminantul $\Delta \geqslant 0$.

1. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ și să presupunem că b are forma $b = 2b_1$ (de exemplu, $b = 2$, $b = 4\sqrt{2}$ etc.).

Rădăcinile ecuației $ax^2 + 2b_1x + c = 0$ sînt

$$x_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$3x^2 - 10x + 3 = 0.$$

---

* Expresia $b^2 - 4ac$ se mai numește realizantul ecuației.

Deoarece coeficientul lui x este $-10 = 2 \cdot (-5)$, aplicăm formulele de mai înainte şi obţinem:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3}.$$

Deci

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

2. *Forma redusă a ecuaţiei de gradul al doilea.* O ecuaţie de gradul al doilea se numeşte *redusă* dacă coeficientul lui x^2 este egal cu 1. Forma generală a ecuaţiei reduse este:

$$x^2 + px + q = 0, \tag{3}$$

unde p şi q sînt numere reale.

Punînd în formula generală a rădăcinilor ecuaţiei de gradul al doilea:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = 1$, $b = p$ şi $c = q$ se obţine formula pentru rădăcinile ecuaţiei de gradul al doilea sub formă redusă:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Exemplu. Fie ecuaţia $x^2 + 4x - 5 = 0$.
Atunci

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 5} = -2 \pm 3,$$

de unde

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -5.$$

Observaţie. Orice ecuaţie de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ poate să fie adusă la forma redusă împărţind ambii membri ai săi prin a:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ este echivalentă cu } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

2.2. Relaţii între coeficienţii şi rădăcinile unei ecuaţii de gradul al doilea

1. *Relaţiile lui Viète*

Dacă rădăcinile ecuaţiei

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0)$$

sînt x_1 şi x_2, atunci:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Aceste relații poartă numele de *relațiile lui Viète*.

Exemplu. Ecuația $4x^2 - 3x - 1 = 0$ are discriminantul $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$. Deci ecuația are două rădăcini reale distincte x_1 și x_2, iar

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}, \quad x_1x_2 = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

2. *Formarea unei ecuații de gradul al doilea cînd se cunosc rădăcinile*

Dacă x_1 și x_2 sînt numere reale, fie $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$. Atunci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației de gradul al doilea $x^2 + px + q = 0$.

Într-adevăr, $x_1^2 + px_1 + q = x_1^2 - (x_1 + x_2)x_1 + x_1x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_2x_1 + x_1x_2 = 0$. Analog, avem $x_2^2 + px_2 + q = 0$. Deci x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + px + q = 0$.

Exemplu. Fie $x_1 = -5$ și $x_2 = 2$. Atunci $x_1 + x_2 = -3 = -p$, $x_1x_2 = -10 = q$ și deci $p = 3$ și $q = -10$. Ecuația care are rădăcinile $x_1 = -5$ și $x_2 = 2$ este

$$x^2 + 3x - 10 = 0.$$

2.3. Studiul semnelor rădăcinilor ecuației de gradul al doilea

Fie ecuația de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0 \tag{1}$$

cu $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Să notăm cu S și P suma, respectiv produsul rădăcinilor x_1, x_2 ale ecuației (1), adică:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Împărțind ambii membri ai ecuației (1) prin a, se obține o ecuație echivalentă:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

sau

$$x^2 - Sx + P = 0. \tag{2}$$

Vom arăta cum, în raport de semnul lui P și S, se poate stabili dacă rădăcinile ecuației sînt pozitive sau negative, fără a le afla efectiv.

Sînt posibile următoarele combinații ale semnelor lui P și S:

1° $P > 0$. Deoarece $x_1x_2 = P > 0$ rezultă că ambele rădăcini au același semn. Dacă $S > 0$, atunci $x_1 + x_2 = S > 0$ și deci ambele rădăcini sînt pozitive. Dacă $S < 0$, atunci $x_1 + x_2 = S < 0$ și deci ambele rădăcini sînt negative.

2° $P < 0$. Deoarece $x_1x_2 = P < 0$, atunci una dintre rădăcini este pozitivă, iar cealaltă negativă. Dacă $S > 0$, atunci $x_1 + x_2 = S > 0$ și deci rădăcina pozitivă este mai mare decît valoarea absolută a rădăcinii negative. Dacă $S < 0$, atunci $x_1 + x_2 = S < 0$ și deci valoarea absolută a rădăcinii negative este mai mare decît rădăcina pozitivă.

Rezultatele obținute se pot reprezenta în următorul tabel:

$P > 0$	$S > 0$ $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
	$S < 0$ $x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$P < 0$	$S > 0$ rădăcinile au semne diferite: $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\|x_1\| < x_2$
	$S < 0$ rădăcinile au semne diferite: $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\|x_1\| > x_2$

Observații: 1. Fie $S = 0$. Ecuația are rădăcini reale numai dacă $P \leqslant 0$. În acest caz avem $x_1 + x_2 = 0$, adică $x_1 = -x_2$.

2. Fie $P = 0$. Atunci $x_1 = 0$ și $x_2 = S$.

Exemple. 1) Fie ecuația $2x^2 - 8x + 7 = 0$. Avem $\Delta = 64 - 56 = 8 > 0$. Deci ecuația are două rădăcini diferite. Cum $x_1x_2 = \frac{7}{2}$ și $x_1 + x_2 = \frac{8}{2} = 4$, adică suma și produsul rădăcinilor sînt pozitive, rezultă că ambele rădăcini sînt pozitive.

2) Fie ecuația $x^2 + 2x - 15 = 0$. Avem $\Delta = 4 + 60 = 64 > 0$, deci ecuația are două rădăcini diferite. Deoarece $x_1x_2 = -15$ și $x_1 + x_2 = -2$, rezultă că rădăcinile au semne diferite și valoarea absolută a rădăcinii negative este mai mare decît rădăcina pozitivă.

2.4. Descompunerea trinomului de gradul al doilea în produs de polinoame de gradul întîi

Fie polinomul de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, în *nedeterminata** X. Un astfel de polinom se numește *trinom de gradul al doilea* .

1. Să presupunem că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcini reale, fie acestea x_1 și x_2. Atunci

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2)$$

sau

$$aX^2 + bX + c = (aX - ax_1)(X - x_2).$$

Așadar, *dacă $b^2 - 4ac \geqslant 0$, atunci trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, se descompune în produs de factori de gradul întîi cu coeficienți reali.*

2. Reciproc, fie trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, și să presupunem că acesta se descompune în produs de factori de gradul întîi cu coeficienți reali, adică

$$aX^2 + bX + c = (a_1X + b_1)(a_2X + b_2), \qquad (1)$$

* Nedeterminata polinomului se notează, uzual, cu literă mare.

unde a_1, b_1, a_2, b_2 sînt numere reale. Atunci rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sînt reale.

Într-adevăr, din relația (1), identificînd coeficienții lui X^2, avem $a = a_1a_2$. Cum $a \neq 0$, rezultă că $a_1 \neq 0$ și $a_2 \neq 0$. Produsul $(a_1x + b_1) \cdot (a_2x + b_2)$ este zero pentru $x = -\frac{b_1}{a_1}$ sau $x = -\frac{b_2}{a_2}$ și deci ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile reale $-\frac{b_1}{a_1}$ și $-\frac{b_2}{a_2}$.

Exemple. 1) Să se descompună trinomul $6X^2 - X - 1$, în factori de gradul întîi cu coeficienți reali.

Rădăcinile ecuației $6x^2 - x - 1 = 0$ sînt: $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Atunci

$$6X^2 - X - 1 = 6\left(X - \frac{1}{2}\right)\left(X + \frac{1}{3}\right) = (2X - 1)(3X + 1).$$

2) Deoarece discriminantul ecuației $x^2 + x + 2 = 0$ este $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, rezultă că trinomul $X^2 + X + 2$ nu se descompune în factori de gradul întîi cu coeficienți reali.

EXERCIȚII

1. Să se rezolve ecuațiile în x:

a) $4x + 1 = m$; b) $mx - m^2 = 4 - 2x$; c) $x = n - m^2x$;

d) $\frac{m}{x - 2} = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$; e) $m = \frac{1 - nx}{1 + nx}$; f) $1 + |x| = m$;

g) $|7x - 1| = 21 - 9x$; h) $|1 - 3x| = |3 - 2x|$; i) $|10 + x| = -10 - x$;

j) $|x + 1| + |x - 1| + |x - 3| = 3 + x$; k) $||x| - 1| = 13$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

a) $7x - 6 < x + 12$; b) $-\frac{2}{3 - x} > 0$; c) $\frac{ax + b}{a - b} > \frac{ax - b}{a + b}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

d) $ax + b > 3 - 2x$; e) $x + \frac{x - 1}{a + 1} > \frac{x + 1}{a + 1} - ax$; f) $|x + 3| \leqslant 5$;

g) $|2x - 1| < |x - 1|$; h) $|x - 2| + |x - 1| > 1$.

3. Să se determine valorile lui x pentru care există radicalii următori (în mulțimea numerelor reale):

a) $\sqrt{8 + 3x}$; b) $\sqrt{6 - x}$; c) $\sqrt{2x + 6}$; d) $\sqrt{1 - 3x} + \sqrt{x}$.

4. Să se rezolve ecuațiile:

a) $6x^2 - x - 1 = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $-x^2 + 8x - 16 = 0$;

d) $\frac{3x - 7}{x + 5} = \frac{x - 3}{x + 2}$; e) $\frac{5}{x + 2} + \frac{9}{2x + 3} = 2$;

f) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2}{x-1}+1$;

g) $\frac{5}{x+m}-\frac{1}{m-x}=2+\frac{10m}{m^2-x^2}$; h) $\frac{x-6}{x-12}-\frac{x-12}{x-6}=\frac{5}{6}$.

5. Să se determine m, astfel încît ecuația $x^2+mx+1=0$:
a) să aibă rădăcini egale; b) să aibă rădăcini reale diferite; c) să nu aibă rădăcini reale.

6. Același enunț ca la problema 5, pentru ecuația $x^2-2mx+m(1+m)=0$.

7. Să se determine valorile lui m, știind că ecuațiile $x^2+x+m=0$ și $x^2+x-m=0$ au același număr de rădăcini reale.

8. Să se formeze ecuațiile de gradul al doilea, care au rădăcinile:
a) $x_1=-3$ și $x_2=5$; b) $x_1=m+n$ și $x_2=m-n$; c) $x_1=2+\sqrt{3}$ și $x_2=2-\sqrt{3}$; d) $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ și $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

9. Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2+px+q=0$. Să se formeze ecuațiile de gradul al doilea în y, ale căror rădăcini sînt:

a) $y_1=\frac{x_1}{x_2}$ și $y_2=\frac{x_2}{x_1}$; b) $y_1=x_1+\frac{1}{x_2}$ și $y_2=x_2+\frac{1}{x_1}$; c) $y_1=(x_1+x_2)^2$ și $y_2=(x_1-x_2)^2$; d) $y_1=\frac{1}{x_1^2}$ și $y_2=\frac{1}{x_2^2}$.

10. Fără a rezolva ecuațiile următoare, să se determine semnele rădăcinilor lor:
a) $x^2-x-6=0$; b) $6x^2-x-1=0$; c) $-5x^2+x-7=0$.

11. Să se determine valorile lui m, astfel încît rădăcinile ecuației $x^2+(1-m)x-m=0$ să aibă:
a) același semn; b) semne diferite.

12. Să se descompună în factori de gradul întîi trinoamele:
a) $6X^2-7X+2$; b) X^2-X+1; c) $2X^2-7mX+6m^2$.

13. Să se determine valorile lui m, astfel încît ecuațiile
$x^2+mx+1=0$ și $x^2+x+m=0$ să aibă o rădăcină comună.

14. Să se studieze semnul rădăcinilor ecuației:
$mx^2+2(m+1)x+|m-2|=0$, m fiind un parametru real.

15. Fie ecuația $4mx^2+4(1-2m)x+3(m-1)=0$. Să se determine valorile lui m astfel încît să avem:
a) ambele rădăcini să fie mai mici decît 1;
b) ambele rădăcini să fie mai mari decît 1;
c) o rădăcină mai mică decît 1 și alta mai mare decît 1.

16. Să se determine valorile parametrului m, astfel încît următoarele ecuații să aibă două rădăcini egale:
a) $4x^2+mx+9=0$; b) $mx^2+4x+1=0$;
c) $x^2-2(1+3m)x+7(3+2m)=0$.

17. Descompunînd membrul stîng în factori, să se rezolve ecuațiile:
a) $4x^3+28x^2-9x-63=0$; b) $6x^3-x^2-486x+81=0$;
c) $x^3+3x^2-16x-48=0$.

18. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{1}{5x-5} + \frac{2x-1}{12x^2+12x} - \frac{1}{5x^2-5} = 0$;

b) $\frac{3x-5}{x^2-1} - \frac{6x-5}{x-x^2} - \frac{3x+2}{x^2-x} = 0$.

19. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4 + 4x - 1 = 0$; b) $x^4 - 4x^3 - 1 = 0$;

c) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = m(m-1)$.

Indicație. a) Adunăm la ambii membri pe $2x^2 + 1$; se obține ecuația $x^2 + 1 = \sqrt{2}\,|x - 1|$. b) Se înlocuiește x cu $\frac{1}{x}$ și se obține ecuația de la punctul a). c) Adunăm la ambii membri ai ecuației pe $\frac{2x^2}{x^2-1}$ și obținem ecuația

$$y^2 - y - m(m-1) = 0, \text{ unde } y = \frac{2x^2}{x^2-1}.$$

20. Fie ecuația $x^2 - |x| = mx(x+1)$. Să se determine m ($m \in \mathbf{R}$) astfel încît această ecuație să aibă trei rădăcini reale.

Indicație. Se consideră cazurile: a) $x \geqslant 0$, $x^2 - x = mx(x+1)$; b) $x < 0$, $x^2 + x = mx(x+1)$.

21. Să se rezolve ecuațiile în x, m fiind un parametru real:

a) $3x^2 - 5mx - 2m^2 = 0$; b) $x(2x+5) - m(x+3) = 3$.

Indicație. a) $\Delta = 49m^2 \geqslant 0$. Dacă $m \neq 0$, atunci $x = \frac{5m \pm |7m|}{6}$, de unde

$x_1 = -\frac{1}{3}m$ și $x_2 = 2m$. Dacă $m = 0$, atunci $x_1 = x_2 = 0$.

b) $\Delta = (m+7)^2$. Dacă $m = -7$, atunci $\Delta = 0$ și rezultă $x_1 = x_2 = -3$. Dacă $m \neq -7$, atunci $\Delta > 0$ și $x = \frac{m - 5 \pm |m+7|}{4}$, de unde $x_1 = \frac{m+1}{2}$ și $x_2 = -3$.

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ, MULŢIMI, FUNCŢII

§ 1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1.1. Elemente de calculul propoziţiilor

Noţiunea de propoziţie. Se numeşte *propoziţie un enunţ* despre care ştim că este sau adevărat sau fals, însă nu şi una şi alta simultan.*

Exemple. Considerăm enunţurile: 1) În orice triunghi suma unghiurilor sale este egală cu 180°; 2) „$3 + 2 = 5$"; 3) „$2 > 5$"; 4) „Balena este un mamifer"; 5) „Planeta Venus este satelit al Pămîntului".

Toate aceste enunţuri sînt propoziţii, deoarece despre fiecare putem să ştim dacă este adevărată sau falsă. De exemplu 1), 2) şi 4) sînt propoziţii adevărate, iar 3) şi 5) sînt propoziţii false.

Observaţie. O clasă foarte largă de propoziţii adevărate o constituie teoremele din matematică.

Exemple. Considerăm enunţurile: 1) „$x + 2 = 5$"; 2) „$x - 1 < 4$"; 3) „Deschide uşa!"; 4) „Numărul x divide numărul y"; 5) „Atomul de aur este galben".

Se observă că 1), 2), 3), 4) şi 5) sînt enunţuri pentru care condiţia de mai sus (de a fi adevărat sau fals) nu este îndeplinită. Mai exact enunţurile 1), 2) şi 4) au caracter variabil (vom vedea că ele sînt predicate). Enunţul 3) este o poruncă (ordin) despre care este lipsit de sens să afirmăm că este adevărat sau fals. Enunţul 5) este absurd, deoarece este lipsit de sens să vorbim despre culoarea unui atom.

Valoare de adevăr. Dacă o propoziţie este adevărată, spunem că ea are *valoarea de adevăr* „adevărul" şi vom nota valoarea de adevăr, în acest caz, prin semnul „1" (sau „a"); cînd propoziţia este falsă spunem că ea are *valoarea de adevăr* „falsul" şi vom nota valoarea de adevăr prin semnul „0" (sau „f").

Observaţie. „0" şi „1" sînt aici simboluri fără înţeles numeric.

Vom nota propoziţiile cu literele p, q, r,... sau p_1, p_2, p_3,... Acestea se pot compune cu ajutorul aşa-numiţilor conectori logici „non", „şi", „sau" dînd propoziţii din ce în ce mai complexe. Să indicăm, în cele ce urmează, modul de obţinere de noi propoziţii cu ajutorul conectorilor logici.

---

* Un enunţ este un asamblaj de semne cărora li s-a dat un sens.

Negația propozițiilor. *Negația propoziției p este propoziția „non p", care se notează* $\neg p$ *și care este adevărată cînd p este falsă și falsă cînd p este adevărată**.

Valoarea de adevăr a propoziției $\neg p$ este dată în tabela următoare:

p	$\neg p$
1	0
0	1

De exemplu, considerăm propoziția p: „Balena este un mamifer". Negația $\neg p$ este propoziția: „Non" balena este un mamifer sau, în limbajul obișnuit, „Balena nu este un mamifer". În acest exemplu $\neg p$ este o propoziție falsă.

Conjuncția propozițiilor. *Conjuncția propozițiilor p, q este propoziția care se citește „p și q" (notată* $p \wedge q$*) care este adevărată atunci și numai atunci cînd fiecare din propozițiile p, q este adevărată.*

Valoarea de adevăr a propoziției $p \wedge q$ este dată în tabela următoare:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

De exemplu, să considerăm propozițiile p: „$2+4=6$" și q: „Luna este satelit al Pămîntului". Propoziția $p \wedge q$ este „$2+4=6$ și Luna este satelit al Pămîntului". În acest exemplu $p \wedge q$ este o propoziție adevărată, deoarece p, q sînt amîndouă propoziții adevărate. Deseori în loc de $p \wedge q$ se mai folosește și notația $p \& q$.

Disjuncția propozițiilor. *Disjuncția propozițiilor p, q este propoziția care se citește „p* sau *q" (notată* $p \vee q$*) și care este adevărată atunci și numai atunci cînd este adevărată cel puțin una dintre propozițiile p, q.*

Valoarea de adevăr a propoziției $p \vee q$ este dată în tabela următoare:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

De exemplu, să considerăm propozițiile p: „$2>3$" și q: „Balena este un pește". Propoziția $p \vee q$: „$2>3$ sau balena este un pește" este o propoziție falsă, deoarece p, q sînt amîndouă propoziții false.

Cu propozițiile $p, q, r, \ldots$ am construit propozițiile: $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q, \ldots$. Din acestea obținem alte propoziții, ca de exemplu: $(\neg p) \vee q$, $(\neg p) \wedge (\neg q)$, $(\neg p \vee q) \wedge r$ etc.

---

* Negația propoziției p se mai notează $\bar{p}$.

Propozițiile care se obțin din propozițiile p, q, r,... (numite *propoziții simple)*, aplicînd de un număr finit de ori conectorii logici „$\neg$, $\wedge$, $\vee$", se vor numi *propoziții compuse. Calculul propozițiilor* studiază propozițiile compuse din punctul de vedere al adevărului sau falsului lor în raport cu valorile logice ale propozițiilor simple care le compun.

Implicația propozițiilor. Să considerăm propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ a cărei valoare de adevăr rezultă din tabela următoare:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Observăm că propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ *este falsă atunci și numai atunci cînd p este adevărată și q falsă, în celelalte cazuri fiind adevărată.*

Propoziția compusă $(\neg p) \vee q$ se notează $p \rightarrow q$ și se citește, „dacă p, atunci q" sau „p implică q". Ea se numește *implicația propozițiilor* p, q (în această ordine).

În implicația „$p \rightarrow q$", p se numește *ipoteza* sau *antecedentul* implicației, iar propoziția q se numește *concluzia* sau *consecventul* implicației.

De exemplu, să considerăm propozițiile p: „$2 \cdot 2 = 5$" și q: „Balena este un mamifer". Propoziția $p \rightarrow q$ este „dacă $2 \cdot 2 = 5$, atunci balena este un mamifer", care este o propoziție adevărată deoarece p este falsă, iar q adevărată.

Observație. Deseori se întîmplă ca propozițiile compuse pe care le obținem să fie „bizare" ca în exemplul dat mai sus la implicație. Din punctul de vedere al logicii matematice, în studiul propozițiilor compuse ne interesează numai valoarea lor de adevăr.

Echivalența propozițiilor. Cu propozițiile p, q putem forma propoziția compusă $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, care se notează $p \longleftrightarrow q$ și se citește „p dacă și numai dacă q".Din tabela de mai jos se vede că propoziția $p \longleftrightarrow q$ este *adevărată atunci și numai atunci* cînd p și q sînt *în același timp adevărate sau false.*

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Formule echivalente în calculul propozițional

Așa cum în clasele mici cu literele a, b, c, ..., x, y, z,... și simbolurile $+$, $\cdot$, $-$, $:$ putem forma expresiile algebrice, așa și în calculul propozițional cu literele p, q, r,... (sau p_1, p_2, p_3,...) și cu simbolurile conectorilor logici: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$ putem să formăm diverse expresii numite *formule ale calculului propozițional.* Formulele calculului propozițional le notăm cu literele α, β, γ, δ,...

Exemple: $p \vee q$, $(p \vee q) \wedge r$, $(p \vee q) \to (p \wedge q)$, $(p \vee r) \to p$, $\neg p \to p$ sînt formule ale calculului propozițional.

Fiind dată o formulă $\alpha = \alpha(p, q, r, ...)$ în scrierea căreia intră literele p, q, r, ..., ori de cîte ori înlocuim literele p, q, r, ... cu diverse propoziții obținem o nouă propoziție (adevărată sau falsă) care se va numi valoarea formulei α pentru propozițiile p, q, r, ... date.

Observație. Cititorul poate să facă imediat legătura cu valoarea unei expresii algebrice pentru diverse valori numerice date literelor ce o compun.

O formulă $\alpha(p, q, r, ...)$ care are valoarea o propoziție adevărată indiferent cum sînt propozițiile $p, q, r, ...$ se numește *formulă identic adevărată sau tautologie.*

Două formule α și β în scrierea cărora intră literele $p, q, r, ...$ se zic *echivalente dacă și numai dacă pentru orice înlocuire a literelor p, q, r, ... cu diverse propoziții, valorile celor două formule sînt propoziții (compuse) care au aceeași valoare de adevăr.*

Cînd două formule α și β sînt echivalente scriem $\alpha \equiv \beta$.

Observație. Și aici cititorul poate să-și dea seama imediat că echivalența formulelor în calculul propozițional este analoagă noțiunii de identitate a două expresii algebrice.

Pentru a dovedi că două formule ale calculului propozițional sînt echivalente se folosesc tabelele de adevăr.

Exemple. 1). Fie $\alpha = \neg(p \vee q)$ și $\beta = (\neg p) \wedge (\neg q)$. Din tabela de mai jos rezultă că $\alpha \equiv \beta$.

p	q	$p \vee q$	α	$\neg p$	$\neg q$	β
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

2) Fie $\gamma = \neg(p \wedge q)$ și $\delta = (\neg p) \vee (\neg q)$. Din tabela de mai jos rezultă că $\gamma \equiv \delta$:

p	q	$p \wedge q$	γ	$\neg p$	$\neg q$	δ
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

EXERCIȚII

1. Să se decidă care din enunțurile următoare sînt propoziții și ce valori de adevăr au:

a) $2 \cdot 3 = 6$; b) $(2 + 5) \cdot (3 + 8) = 80$; c) $|x| > 0$ (x număr real); d) Oricare ar fi numărul real x avem $|x| \geqslant 0$; e) Închide cartea!; f) Există un număr real x, astfel încît $x^2 + 2x - 3 = 0$; g) Dreptele d și d' sînt paralele.

2. Din propozițiile p : „$2 = 4$" și q: „$3 < 5$" alcătuiți conjuncția, disjuncția, implicația și echivalența celor două propoziții.

3. Folosind tabelele de adevăr, să se verifice:

a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$; c) $p \equiv \neg(\neg p)$; d) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$; e) $p \vee q \equiv q \vee p$ și $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

4. Să se arate că următoarele propoziții au valoarea de adevăr „1“ indiferent de propozițiile simple ce le compun:

a) $p \to (p \vee q)$; b) $(p \wedge q) \to p$; c) $(p \wedge (p \to q)) \to q$;
d) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$; e) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$;
f) $p \vee (\neg p)$; g) $\neg(p \wedge (\neg p))$.

1.2. Elemente de calculul predicatelor

Noțiunea de predicat are o importanță deosebită în matematică. Fără a exagera, aproape orice teoremă din matematică este un enunț ce conține unul sau mai multe predicate.

Noțiunea de predicat. Să considerăm enunțurile:

1) „$x + 2 < 3$“; 2) „x divide y“.

Să luăm enunțul „$x + 2 < 3$“. Se vede că dacă înlocuim x cu 2, obținem propoziția falsă, „$2 + 2 < 3$“. Dacă facem $x = 0$, obținem propoziția adevărată „$0 + 2 < 3$“ etc.

Să considerăm enunțul „x divide y“. Pentru $x = 2$ și $y = 6$ obținem propoziția adevărată „2 divide 6“. Pentru $x = 4$ și $y = 6$ obținem propoziția falsă „4 divide 6“ etc.

Un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice „valori“ date variabilelor corespunde o propoziție (adevărată sau falsă) *se numește predicat* (sau *propoziție cu variabile).* Predicatele sînt: *unare*, *binare*, *ternare* etc., după cum depind respectiv de 1, 2, 3,... variabile. Notăm predicatele cu $p(x, y, z, \ldots)$, $q(x, y, z, \ldots)$... Ori de cîte ori definim un predicat, *trebuie să indicăm și mulțimile în care variabilele iau valori.*

Exemple. 1) Enunțul $p(x)$: „$x - 1 = 7$“, unde x desemnează un număr întreg, este un predicat unar.

2) Enunțul $p(x, y)$: „x este frate cu y“, unde x, y desemnează oameni, este un predicat binar.

3) Enunțul $p(x, y, z)$: „$x = y + z$“, unde x, y, z desemnează numere întregi, este un predicat ternar.

4) Dacă avem două predicate $P = p(x, y, z, \ldots)$ și $Q = q(x, y, z, \ldots)$, care conțin aceleași variabile, putem forma cu ajutorul conectorilor logici noi predicate: $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ ș.a.

Așa, spre exemplu, pentru predicatul $p(x)$, $\neg p(x)$ este predicatul căruia pentru fiecare valoare $x = x_0$ îi corespunde propoziția $\neg p(x_0)$.

Cuantificatorul existențial ($\exists$) *și cuantificatorul universal* ($\forall$). Strîns legată de noțiunea de predicat apare noțiunea de cuantificator. Fie predicatul unar $p(x)$, unde x desemnează un element oarecare din mulțimea E. Putem forma enunțul:

„*există cel puțin un x din E astfel încît $p(x)$*“, care se notează $(\exists x)\, p(x)$. Acest enunț este o *propoziție*, *care este adevărată cînd există cel puțin un element x_0* din E, astfel încît *propoziția $p(x_0)$ este adevărată și este falsă cînd nu există nici un x_0 din E astfel încît $p(x_0)$ să fie adevărată.*

Exemple. 1) Considerăm predicatul $p(x)$: „$x + 3 = 0$", unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\exists x)(x + 3 = 0)$ este adevărată, deoarece pentru $x_0 = -3$ propoziția $p(-3)$: „$-3 + 3 = 0$" este adevărată.

3) Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 + 1 = 0$", unde x desemnează un număr real. Propoziția $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$ este falsă, deoarece nu există nici un număr real x_0 astfel încît să avem $x_0^2 + 1 = 0$.

Cu predicatul $p(x)$ putem forma și enunțul:

„*oricare ar fi x din E are loc $p(x)$*",

care se notează $(\forall x)\ p(x)$. Acest enunț este o propoziție, care este adevărată dacă pentru orice element x_0 din E, $p(x_0)$ este adevărată și este falsă în cazul cînd există cel puțin un x_0 din E pentru care $p(x_0)$ este falsă.

Exemple. 1) Fie predicatul $p(x)$: „$x + 3 = 0$", unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)(x + 3 = 0)$ este falsă, deoarece de exemplu pentru $x_0 = 4$, propoziția $p(4)$: „$4 + 3 = 0$" este falsă.

2) Considerăm predicatul $p(x)$: „$x^2 \geqslant 0$" unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)\ (x^2 \geqslant 0)$ este adevărată, deoarece pentru orice număr întreg x_0 avem $x_0^2 \geqslant 0$.

Echivalența predicatelor. Două predicate $p(x, y, z, \ldots)$, $q(x, y, z, \ldots)$ se zic *echivalente* și scriem $p(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots)$, dacă oricum am alege valorile variabilelor $x_0, y_0, z_0, \ldots$, propozițiile $p(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ și $q(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ au aceeași valoare de adevăr. Dacă oricum am alege valorile variabilelor $x_0, y_0, z_0, \ldots$ pentru care propoziția $p(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ este adevărată rezultă că și propoziția $q(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ este adevărată, vom scrie

$$p(x, y, z, \ldots) \Rightarrow q(x, y, z, \ldots).$$

Se vede că $p(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots)$ atunci și numai atunci cînd $p(x, y, z, \ldots) \Rightarrow q(x, y, z, \ldots)$ și $q(x, y, z, \ldots) \Rightarrow p(x, y, z, \ldots)$.

Exemple. 1) Considerăm predicatele $p(x)$: „$x < 0$" și $q(x)$: „$x \geqslant 0$" unde x desemnează un număr real. Se observă că

$$\urcorner p(x) \Leftrightarrow q(x) \text{ și } \urcorner q(x) \Leftrightarrow p(x).$$

2) Considerăm predicatele $p(x, y)$: „$x = y$" și $q(x, y)$: „$x \neq y$", unde x, y desemnează numere reale. Se observă că

$$\urcorner p(x, y) \Leftrightarrow q(x, y).$$

3) Considerăm predicatele $p(x)$: „$x > 0$" și $q(x)$: „$x^2 > 0$", unde x desemnează un număr real.

Se vede că $p(x) \Rightarrow q(x)$, dar *nu are loc implicația* $q(x) \Rightarrow p(x)$, deoarece pentru $x_0 = -1$, propoziția $q(-1)$: „$(-1)^2 > 0$" este adevărată, pe cînd propoziția $p(-1)$: „$-1 > 0$" este falsă.

Reguli de negație. Fie $p(x)$ un predicat unar, unde x desemnează un element din mulțimea E. Atunci

1) $\urcorner((\exists x)\ p(x)) \equiv (\forall x) \urcorner p(x)$,

2) $\urcorner((\forall x)\ p(x)) \equiv (\exists x) \urcorner(p(x))$

(aici semnul „$\equiv$" desemnează faptul că cele două propoziții au aceeași valoare de adevăr).

Exemple. 1) Să considerăm predicatul $p(x)$: „$x - 2 = 3$", unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\exists x)\, p(x)$ este adevărată deoarece pentru $x_0 = 5$, propoziția $p(x_0)$: „$5 - 2 = 3$" este adevărată. Atunci propoziția $\rceil(\exists x)\, p(x)$ este falsă. Pe de altă parte, predicatul $\rceil p(x)$ este echivalent cu predicatul „$x - 2 \neq 3$". Propoziția $(\forall x)\, (x - 2 \neq 3)$ este falsă, deoarece pentru $x_0 = 5$, propoziția „$5 - 2 \neq 3$" este falsă. Deci am verificat că

$$\rceil(\exists x)\,(x - 2 = 3) \equiv (\forall x)\, \rceil(x - 2 = 3).$$

2) Considerăm predicatul $p(x)$: „$x > 0$", unde x desemnează un număr întreg. Propoziția $(\forall x)(x > 0)$ este falsă, deoarece pentru $x_0 = -1$, „$-1 > 0$" este o propoziție falsă. Atunci, propoziția $\rceil((\forall x)(x > 0))$ este adevărată.

Pe de altă parte, $\rceil p(x)$ este echivalent cu predicatul „$x \leqslant 0$". Propoziția $(\exists x)\,(x \leqslant 0)$ este adevărată. Deci am verificat că

$$\rceil((\forall x)\,(x > 0)) \equiv (\exists x)\, \rceil(x > 0).$$

Predicate de mai multe variabile. Fie $p(x, y)$ un predicat binar. Folosind cuantificatorii $(\exists)$ și $(\forall)$, putem forma predicatele unare: $(\exists x)\, p(x, y)$ și $(\forall x)\, p(x, y)$, unde y este variabila acestor două predicate (y se zice *variabilă liberă*, iar x *variabilă legată*). Din aceste două predicate unare putem forma propozițiile:

„$(\exists y)\,(\exists x)\, p(x, y)$, $(\forall y)\,(\exists x)\, p(x, y)$, $(\exists y)\,(\forall x)\, p(x, y)$ și $(\forall y)\,(\forall x)\, p(x, y)$".

Semnalăm următoarele proprietăți de comutativitate ale cuantificatorului de același fel:

$$(\forall x)\,(\forall y)\, p(x, y) \equiv (\forall y)\,(\forall x)\, p(x, y)$$

$$(\exists x)\,(\exists y)\, p(x, y) \equiv (\exists y)\,(\exists x)\, p(x, y).$$

Din regulile de negație pentru predicatele unare obținem regulile de negație pentru predicatele binare.

De exemplu: $\rceil((\exists x)\,(\exists y)\, p(x, y)) \equiv (\forall x)\,(\forall y)\, \rceil p(x, y)$.

Într-adevăr: $\rceil((\exists x)\,(\exists y)\, p(x, y)) \equiv (\forall x)\, \rceil((\exists y)\, p(x, y)) \equiv (\forall x)\,(\forall y)\, \rceil p(x, y)$. Considerații analoage se pot face pentru predicate cu 3, 4 sau mai multe variabile.

Observații. 1) Dacă $p(x, y, z, \ldots)$ și $q(x, y, z, \ldots)$ sînt două predicate, atunci $p(x, y, z, \ldots) \Leftrightarrow q(x, y, z, \ldots)$ dacă și numai dacă este adevărată propoziția: $(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z) \ldots [p(x, y, z, \ldots) \longleftrightarrow q(x, y, z, \ldots)]$. De asemenea, $p(x, y, z, \ldots) \Rightarrow q(x, y, z, \ldots)$ atunci și numai atunci cînd este adevărată propoziția:

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall z) \ldots [p(x, y, z, \ldots) \rightarrow q(x, y, z, \ldots)].$$

2) *Multe teoreme se scriu sub forma implicației*

$$p(x, y, z, \ldots) \Rightarrow q(x, y, z, \ldots).$$

1° Considerăm teorema: în orice triunghi medianele sînt concurente. Această teoremă este de forma $p(x, y, z) \Rightarrow q(x, y, z)$, unde $p(x, y, z)$ este predicatul ternar: „x, y, z sînt medianele unui triunghi" iar $q(x, y, z)$ este predicatul: „x, y, z sînt concurente".

2° Fie teorema: dacă ABC este un triunghi dreptunghic, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Această teoremă este de forma:

$$p(x, y, z) \Rightarrow q(x, y, z),$$

unde $p(x, y, z)$ este predicatul: „x, y, z sînt laturile unui triunghi dreptunghic $\wedge (x < z) \wedge (y < z)$", iar $q(x, y, z)$ este predicatul: „$z^2 = x^2 + y^2$".

3°. Teorema următoare: „Între două numere raționale distincte se găsește un număr rațional diferit de acestea", se scrie sub forma:
$p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$, unde $p(x, y)$ este predicatul: „$(x \neq y) \wedge (x < y)$", iar $q(x, y)$ este predicatul: „$(\exists z) [(x < z) \wedge (z < y)]$.

EXERCIȚII

1. Fie, predicatul $p(x, y)$: „x divide y" unde x, y desemnează numere naturale.

a) Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile: $p(2, 6)$, $p(7, 15)$, $p(20, 100)$, $p(45, 100)$.

b) Să se determine valorile de adevăr ale propozițiilor:
$(\forall x) (\forall y)\ p(x, y)$, $(\forall x) (\exists y)\ p(x, y)$, $(\forall y) (\exists x)\ p(x, y)$, $(\exists x) (\exists y)\ p(x, y)$.

2. Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 - 2x + 3 = 0$" unde x desemnează un număr real. Să se determine valorile de adevăr pentru propozițiile: $(\exists x)\ p(x)$ și $(\forall x)\ p(x)$. Să se verifice regulile de negație.

3. Pentru orice predicat binar $p(x, y)$, să se verifice că propoziția $(\exists x) (\forall y)\ p(x, y) \rightarrow (\forall y) (\exists x)\ p(x, y)$ este adevărată.

4. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x + y = 2$" unde x, y, desemnează numere întregi. Să se spună dacă propoziția $(\forall y) (\exists x) (p(x, y) \rightarrow (\exists x) (\forall y)\ p(x, y))$ este adevărată sau falsă.

5. Să se determine valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $(\forall x) [(x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$, unde x desemnează un număr real oarecare;

b) $(\exists x) (\exists y) [(x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \rightarrow (xy = 0)]$, unde x, y sînt numere oarecare.

§ 2. MULȚIMI

2.1. Noțiunea de mulțime

Noțiunile de mulțime și de element al unei mulțimi fac parte din categoria acelor noțiuni matematice care nu pot fi definite, dar sînt impuse de numeroase exemple: 1) mulțimea cuvintelor din limba română; 2) mulțimea elevilor dintr-o clasă; 3) mulțimea numerelor naturale: 0, 1, 2, 3, ... etc.

Așa cum scria Cantor, creatorul teoriei mulțimilor, o mulțime este „*o colecție de obiecte (numite elementele mulțimii) de natură oarecare, bine determinate și bine distincte*".

Vom nota cu litere mari mulțimile, cu litere mici elementele lor. Dacă A este o mulțime și x un element al său, vom scrie $x \in A$ și vom citi „x aparține lui A". Dacă x nu se găsește în A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi „x nu aparține lui A".

Așa cum rezultă din fraza de mai sus, elementele unei mulțimi sînt distincte, adică un același element nu se poate repeta de mai multe ori. De asemenea, elementele unei mulțimi trebuie să fie bine determinate. Există două moduri de definire (de determinare) a unei mulțimi:

a) *Numind individual elementele sale*. În acest caz mulţimea se specifică scriind între acolade elementele sale: $\{x, y, z, \ldots\}$. De exemplu: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adică mulţimea formată din primele şase numere naturale; $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, adică mulţimea formată din primele patru litere mici ale alfabetului grec.

b) *Specificînd o proprietate pe care o au elementele sale şi nu o au alte elemente*. Mai precis, dată o proprietate, se poate vorbi de mulţimea acelor obiecte pentru care proprietatea respectivă are loc. Mulţimile definite în acest mod se vor nota prin

$$A = \{x \mid P(x)\},$$

adică mulţimea acelor obiecte x, pentru care are loc $P(x)$.

Exemple. 1). Considerăm proprietatea: „este număr prim par". În acest caz mulţimea este $\{2\}$.

2) Dacă considerăm proprietatea: „număr natural par" în acest caz A este mulţimea numerelor naturale pare.

O mulţime definită după primul mod se zice că este dată *sintetic*, iar o mulţime definită în al doilea mod se zice că este dată *analitic*.

O mulţime care are un număr finit de elemente se zice *finită*. În caz contrar se numeşte *infinită*. De exemplu: mulţimea elevilor dintr-o clasă, mulţimea oamenilor de pe glob, sînt mulţimi finite. Mulţimea numerelor naturale, mulţimea numerelor naturale pare, sînt mulţimi infinite.

În teoria mulţimilor se admite existenţa unei mulţimi care nu are nici un element; aceasta se numeşte mulţimea *vidă* şi se notează cu simbolul $\emptyset$.

Notaţii. Cu $\mathbf{N}$ vom nota mulţimea numerelor naturale: $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$; cu $\mathbf{Z}$ mulţimea numerelor întregi; cu $\mathbf{Q}$ mulţimea numerelor raţionale, iar cu $\mathbf{R}$ mulţimea numerelor reale. Dacă a şi b sînt două numere reale cu $a < b$, vom nota cu:

$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$, numit *interval închis* cu extremităţile a şi b;
$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x < b\}$, numit *interval închis la stînga şi deschis la dreapta*;
$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x \leqslant b\}$, numit *interval deschis la stînga şi închis la dreapta*.

Dacă $a \in \mathbf{R}$, notăm cu:
$[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a \leqslant x\}$, (respectiv $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ a < x\}$), numit *interval închis la stînga şi nemărginit la dreapta* (respectiv *interval deschis la stînga şi nemărginit la dreapta*).

De asemenea notăm cu:
$(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leqslant a\}$ (respectiv $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < a\}$), numit *interval închis la dreapta şi nemărginit la stînga* (respectiv *interval deschis la dreapta şi nemărginit la stînga*).

Se observă că toate aceste mulţimi sînt definite analitic.

2.2. Mulţimi egale

Se spune că mulţimea A este *egală* cu o mulţime B dacă orice element al lui A aparţine lui B şi reciproc. Notăm faptul că mulţimile A şi B sînt egale astfel: $A = B$.

Exemple: 1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{4, 3, 2, 5, 1\}$.
2) Mulţimea $\{2\}$ este egală cu mulţimea numerelor naturale pare care sînt prime.
3) Mulţimile $\{2, 3, 4\}$ şi $\{2, 3, 7, 10\}$ nu sînt egale.

Relaţia de egalitate între mulţimi are următoarele proprietăţi:
i) este reflexivă, adică $A = A$;
ii) este simetrică: dacă $A = B$, atunci $B = A$;
iii) este tranzitivă: dacă $A = B$ şi $B = C$, atunci $A = C$.

2.3. Relaţia de incluziune

Se spune că o mulţime A este *inclusă* în mulţimea B dacă orice element al mulţimii A este şi element al mulţimii B. Se notează $A \subset B$ sau $B \supset A$. Dacă A nu este inclusă în B se scrie $A \not\subset B$. Altfel spus, $A \not\subset B$ înseamnă că există $x \in A$ astfel încît $x \notin B$.

Cînd A este inclusă în B se mai spune că B *conţine* pe A sau că A este o *submulţime* (sau *parte*) a lui B.

Exemple. 1) $\{1, 2, 3\}$ este inclusă în $\{1, 2, 3, 5, 7\}$, adică $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5, 7\}$.
2) Mulţimea numerelor naturale pare este inclusă în mulţimea numerelor naturale.
3) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.
4) Se face convenţia că pentru orice mulţime A, mulţimea vidă este inclusă în A, adică $\emptyset \subset A$.
5) Mulţimea $\{1, 2, 3\}$ nu este inclusă în mulţimea $\{2, 3, 5, 7\}$ deoarece $1 \notin \{2, 3, 5, 7\}$.

Fie A o mulţime şi o proprietate $P(x)$; mulţimea elementelor din A care au proprietatea $P(x)$ se notează:

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Exemple. 1) Mulţimea numerelor naturale care se divid cu 5 se notează $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 5 \text{ divide } x\}$.
2) Mulţimea numerelor întregi x cu proprietatea $7x + 8 = -6$ se scrie $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 7x + 8 = -6\}$. Se vede că $A = \{-2\}$.

Din definiţia relaţiei de incluziune rezultă că aceasta are următoarele proprietăţi.
a) este reflexivă, adică $A \subset A$;
b) este antisimetrică, adică dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci $A = B$;
c) este tranzitivă, adică din $A \subset B$ şi $B \subset C$ rezultă $A \subset C$.

Proprietatea b) se utilizează în practică în sensul că pentru a dovedi că $A = B$ se probează incluziunile $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Dacă A este o mulţime, atunci mulţimea care are ca elemente toate submulţimile lui A, se numeşte mulţimea părţilor lui A şi se notează cu $\mathcal{P}(A)$. Aşadar

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}.$$

Observăm că mulţimea vidă $\emptyset$ şi mulţimea totală A sînt elemente ale lui $\mathcal{P}(A)$.

Exemple. Fie $A = \{1, 2, 3\}$. Avem

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\} \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

2.3. Operații cu mulțimi

1. *Reuniunea mulțimilor*

Definiție. Se numește *reuniunea* a două mulțimi A și B mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia din mulțimile A sau B.

Notăm reuniunea mulțimilor A și B prin $A \cup B$ și citim „A reunit cu B". Deci $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Exemple. 1) $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 10, 12, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 10, 12, 13\}$,
2) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e, f\}$.

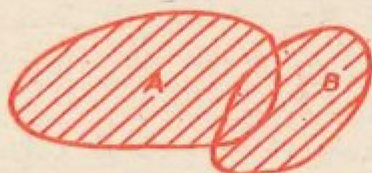


Fig. II.1

Grafic, reuniunea a două mulțimi este reprezentată în figura II.1 prin porțiunea hașurată.

Observație. Așa cum am definit reuniunea a două mulțimi, putem defini reuniunea unui număr finit de mulțimi. Mai exact, dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt n mulțimi, atunci mulțimea elementelor x cu proprietatea „x aparține cel puțin uneia din mulțimile A_1 sau A_2 sau ... sau A_n" se numește reuniunea mulțimilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și se notează $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Deci $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid (\exists i)\ 1 \leqslant i \leqslant n$ astfel încît $x \in A_i\}$.

Exemple. 1) Fie $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$ și $A_3 = \{1, 3, 5\}$. Atunci $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2) Dacă $B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2, 5\}$, $B_3 = \{1, 2, 6\}$ și $B_4 = \{2, 5, 7\}$, atunci $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 = \{1, 2, 5, 6, 7\}$.

2. *Intersecția mulțimilor*

Definiție. Se numește *intersecția* a două mulțimi A și B mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui B.

Intersecția mulțimilor A și B se notează $A \cap B$ și se citește „A intersectat cu B".

Deci: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Mulțimile A și B se numesc ***disjuncte*** *dacă* $A \cap B = \varnothing$, adică dacă nu au în comun nici un element.

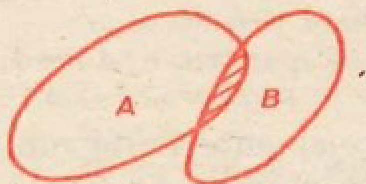


Fig. II.2

Exemple. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 5, 7, 8\} = \{2\}$;
2) $\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, d, f\} = \{b, d\}$;
3) $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 8, 9\} = \varnothing$.

Grafic, intersecția a două mulțimi este reprezentată în figura II.2 prin porțiunea hașurată.

Observație. Așa cum am definit intersecția a două mulțimi, putem defini intersecția unui număr finit de mulțimi. Mai exact dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt n mulțimi, atunci mulțimea elementelor x cu proprietatea „x aparține și lui A_1 și lui A_2 ... și lui A_n" se numește intersecția mulțimilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și se notează $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Deci $A_1 \cap A_2 \cap A_n = \{x \mid (\forall i) 1 \leqslant i \leqslant n$ avem $x \in A_i\}$.

Exemple 1) Fie $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 3, 4, 5\}$ și $A_3 = \{1, 4, 6\}$. Atunci $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1, 4\}$.

2) Dacă $B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_2 = \{1, 4, 5, 6\}$, $B_3 = \{1, 4, 5, 7\}$, $B_4 = \{4, 5, 6, 8\}$ și $B_5 = \{3, 4, 5\}$, atunci $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 = \{4, 5\}$.

3. *Complementara unei submulțimi*

Definiție. Fie E o mulțime și A o submulțime a lui E. Submulțimea lui E formată din acele elemente ce nu aparțin lui A se numește *complementara lui A în raport cu E*. Această mulțime se notează $C_E A$ (sau mai simplu CA cînd nu există nici un dubiu asupra mulțimii E).

Deci: $C_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

Exemple. 1) Dacă $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $A = \{1, 3, 5\}$, atunci $C_E A = \{2, 4\}$.

2) Dacă A este mulțimea numerelor naturale pare, atunci $C_{\mathbf{N}} A$ este mulțimea numerelor naturale impare.

3) Dacă $E = \{a, b, c, d\}$ și $A = \{b, d\}$, atunci $C_E A = \{a, c\}$.

4) $C_E E = \emptyset$ și $C_E \emptyset = E$.

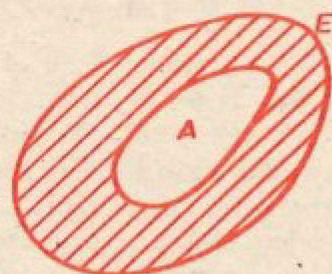


Fig. II.3

Grafic, complementara unei submulțimi A în raport cu mulțimea E este reprezentată în figura II.3 prin porțiunea hașurată.

4. *Diferența a două mulțimi*

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Mulțimea formată din elementele lui A care nu sînt elemente ale lui B se numește *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează $A - B$.

Deci:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Exemple. 1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 4, 5, 7\} = \{1, 3\}$.

2) $\{a, b, c\} - \{d, e, f\} = \{a, b, c\}$.

3) $\{a, b, c\} - \{a, c\} = \{b\}$.

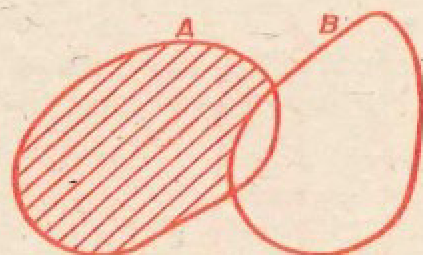


Fig. II.4

Grafic, diferența dintre A și B este reprezentată în figura II.4 prin porțiunea hașurată.

5. *Produs cartezian*

Definiție. Se numește *pereche ordonată (cuplu)* formată din elementele x și y o ordine între elementele x și y în sensul că x este primul element, iar y este al doilea element și se notează cu (x, y).

În perechea (x, y), x se mai numește *prima componentă*, iar y *a doua componentă*.

Două perechi (x, y) și (x', y') sînt egale dacă și numai dacă $x = x'$ și $y = y'$.

Rezultă că $(x, y) \neq (y, x)$, egalitatea avînd loc numai pentru $x = y$. De aici rezultă că noțiunea de pereche ordonată este diferită de cea de mulțime formată din două elemente.

Exemple. 1) Cu numerele 1 și 2 putem forma două perechi ordonate: $(1, 2)$ și $(2, 1)$ care sînt distincte. În plus perechile $(1, 2)$ și $(2, 1)$ sînt diferite de mulțimea $\{1, 2\}$;

2) Cu numerele 1 și 1 putem forma cuplul $(1, 1)$.

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Mulțimea ale cărei elemente sînt toate perechile ordonate (a, b), în care $a \in A$ și $b \in B$ se numește *produsul cartezian* al mulțimilor A și B (în această ordine) și se notează $A \times B$.

Deci: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$.

Cînd $A = B$, se notează $A \times A = A^2$.

Exemplu. Fie $A = \{1, 4, 5,\}$ și $B = \{1, 2, 3,\}$.
Atunci $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$
și $B \times A = \{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (2,5), (3,1), (3,4), (3,5)\}$.

Se observă că $A \times B \neq B \times A$ deoarece, de exemplu, elementul $(1, 2) \in A \times B$ și $(1, 2) \notin B \times A$.

Observații. 1) În exercițiile unde avem de determinat produsul cartezian a două mulțimi este bine să reținem faptul că dacă A este o mulțime finită cu m elemente, iar B este o mulțime finită cu n elemente, atunci $A \times B$ are $m \cdot n$ elemente. Într-adevăr, cu fiecare element $a \in A$ putem construi n perechi ordonate de forma (a, y), cu $y \in B$. Cum B are m elemente, numărul total de perechi ordonate este $m \cdot n$.

2) Fie A și B submulțimi ale mulțimii numerelor reale $\mathbf{R}$. Mulțimea $A \times B$ se poate reprezenta grafic printr-o mulțime de puncte din plan, în care s-a fixat un sistem de axe rectangulare xOy, asociind fiecărui element $(x, y) \in A \times B$, punctul $P(x, y)$ de coordonate x și y.

De exemplu: 1° Dacă $A = [1, 2]$ și $B = [2, 4]$, atunci $A \times B$ are ca reprezentare în plan dreptunghiul hașurat $ABCD$ (fig. II.5) unde $A(1, 2)$, $B(1, 4)$, $C(2, 4)$ și $D(2, 2)$.

2° Dacă $A = B = \mathbf{R}$, atunci $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ are ca reprezentare tot planul.

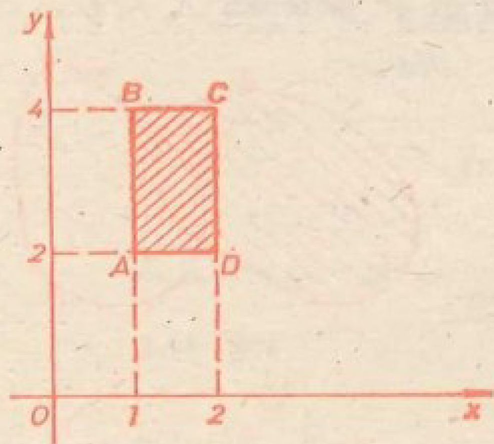


Fig. II.5

6. *Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi* (Exerciții)

1°. Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ și $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*asociativitatea reuniunii* și a *intersecției*).

2° Dacă A, B sînt mulțimi, atunci $A \cup B = B \cup A$ și $A \cap B = B \cap A$ (*comutativitatea reuniunii și intersecției*).

3° Dacă A este o mulțime, atunci $A \cup A = A$ și $A \cap A = A$ (*idempotența* reuniunii și intersecției).

4° Oricare ar fi mulțimea A, $A \cup \emptyset = A$ și $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributivitatea reuniunii* față de *intersecție*) și $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*distributivitatea intersecției față de reuniune*).

6° Dacă A, B sînt submulțimi ale lui E, atunci $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$ și $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$ (formulele lui de Morgan).

7°. Dacă A este o submulțime a lui E, atunci $C_E(C_E A) = A$.

8° Dacă A, B sînt două mulțimi, atunci $A - B = C_A(A \cap B)$.

9° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci
i) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$; ii) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$; iii) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$; iv) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C) = (A - C) \cap B$.

10° Dacă A, B, C sînt trei mulțimi, atunci
i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; iii) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

Vom demonstra, ca model, distributivitatea reuniunii față de intersecție, adică $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Fie $x \in A \cup (B \cap C)$. Avem:

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ sau $(x \in B$ și $x \in C) \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ și $(x \in A$ sau $x \in C) \Rightarrow x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Deci $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Fie $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Avem:

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in A \cup B$ și $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ și $(x \in A$ sau $x \in C) \Rightarrow x \in A$ sau $(x \in B$ și $x \in C) \Rightarrow x \in A$ sau $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$. Deci $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Din cele două incluziuni rezultă că $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Observație. Ca exercițiu, să formalizăm în termeni logici cîteva din definițiile din acest paragraf. De exemplu:

1) relația de incluziune, $A \subset B$, se scrie:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B);$$

2) relația $A \not\subset B$ se scrie:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x)\ ((x \in A) \wedge (x \notin B)).$$

Folosind legile de negație din calculul cu predicate, se poate verifica ușor că propoziția $(\exists x)\ ((x \in A) \wedge (x \notin B))$ este echivalentă cu propoziția $\neg((\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B))$,

3) definiția reuniunii $A \cup B$, se scrie

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B);$$

4) definiția intersecției $A \cap B$, se scrie

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B);$$

5) definiția complementarei $C_E A$, se scrie

$$x \in C_E A \Leftrightarrow (x \in E) \wedge (x \notin A);$$

6) definiția diferenței $A - B$, se scrie

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B).$$

Propunem cititorului să formalizeze și alte definiții întîlnite.

EXERCIȚII

1. Să se verifice egalitățile:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$;

b) $\{x \in \mathbf{N} \mid x^2 + x - 2 = 0\} = \{1\}$;

c) $\{x \in \mathbf{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \{1\}$;

d) $\{x \in \mathbf{Q} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{2},\ 1\right\}$;

e) $\{x \in \mathbf{Z} \mid \ |x - 1| = 2\} = \{-1,\ 3\}$.

2. Să se determine mulţimea:
$\{x \in \mathbf{Z} \mid mx^2 - (m^2 + 1)x + m = 0\}$. Discuţie.

3. Să se arate că oricare din condiţiile: $A \subset B$, $A \cap B = A$ şi $A \cup B = B$, pentru submulţimile A şi B ale mulţimii X, implică celelalte două.

4. Care dintre următoarele propoziţii sînt adevărate sau false:
a) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$; b) $\{4, 5, 6\} = \{6, 4, 5\}$;
c) $\{8 + 1, 5\} = \{5, 9\}$; d) $3 \in \{3\}$; e) $3 \notin \{3\}$;
f) $3 \subset \{3\}$; g) $\{3\} = \{4\}$; h) $\{3\} = \{\{3\}\}$;
i) $\emptyset \subset \{1\}$; j) $\emptyset \in \{1\}$.

5. Să se descrie mulţimile:
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$ şi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})))$.

6. Să se determine mulţimile

a) $A = \left\{x \in \mathbf{N} \,\middle|\, x = \frac{4n}{n + 2},\ n \in \mathbf{N}\right\}$;

b) $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, x = \frac{6n + 7}{3n + 1},\ n \in \mathbf{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{x \in \mathbf{N} \,\middle|\, x = \frac{2n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 7, 11\}$. Să se determine mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$. Dacă $E = A \cup B$, să se determine $C_E A$ şi $C_E B$.

8. Fie $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 7, 9\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$. Să se arate că $A \cup B = A \cup C$.

9. Dacă A, B, C sînt trei mulţimi astfel încît $A \cup B = A \cup C$ şi $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$.

10. Să se determine m astfel încît:
$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 4x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} \neq \emptyset$.

11. Să se determine m astfel încît:
$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 3x + m = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\} = \emptyset$.

12. Să se determine m astfel încît:

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx - 1 = 0\} - \left\{-2,\ \frac{1}{2}\right\} = \emptyset.$$

13. Să se arate că mulţimea
$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 4x + m^2 = 0\}$
are două elemente oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

14. Să se arate că:

$$\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, x = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1},\quad a \in \mathbf{R}\right\} = (-\infty,\ -3] \cup [1,\ +\infty).$$

15. Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + mx + m^2 + 1 = 0\}$. Să se calculeze $C_{\mathbf{R}} A$.

16. Determinaţi toate submulţimile următoarelor mulţimi:
$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z, u, v\}$.

17. Fie a un număr natural. Vom nota cu $D(a)$ mulţimea
$D(a) = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ divide } a\}$.
i) Dovediţi că $D(a)$ are cel puţin două elemente ($a > 1$).
ii) Pentru care numere naturale a, $D(a)$ are exact două elemente.
iii) Pentru care numere naturale a, $D(a)$ are exact patru elemente.
iv) Determinaţi mulţimile: $D(8)$, $D(160)$, $D(120)$.

18. Să se determine m astfel încît mulţimea
$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - mx + 2 = 0\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - mx + 1 = 0\}$
să conţină 3 elemente. Poate avea A 2 elemente?

19. Fie $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ numere naturale. Fie, de asemenea, a un număr natural. Pentru orice număr natural k notăm:
$$A_k = \{a + r_k m \mid m = 1, 2, \ldots\}.$$
Dovediţi că nu există nici un element comun tuturor mulţimilor $A_k (k \geqslant 1)$.

20. Fie A, B două mulţimi. Notăm cu $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (Mulţimea $A \Delta B$ se numeşte *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B). Dovediţi că: a) Pentru orice trei mulţimi A, B, C are loc egalitatea $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$; b) $A \Delta \varnothing = \varnothing \Delta A = A$; c) $A \Delta B = B \Delta A$; d) $A \Delta A = \varnothing$.

21. Fie a_0 un număr natural. Definim mulţimea
$A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ unde $a_1 = \sqrt{a_0^2 + 1}, \ldots, a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}, \ldots$.
Arătaţi că mulţimea $A - \mathbf{Q} \neq \varnothing$.

22. Dacă M este o mulţime finită, vom nota prin $n(M)$ numărul elementelor sale. Fie A, B, C trei mulţimi. Dovediţi că:
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)] + n(A \cap B \cap C).$$

23. Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n mulţimi ($n \geqslant 2$). Dovediţi că pentru oricare două numere naturale i, j ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$), avem:
$$(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i) \cap (A_{i+1} \cap \ldots \cap A_n) = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j) \cap (A_{j+1} \cap \ldots \cap A_n) = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$
şi $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i) \cup (A_{i+1} \cup \ldots \cup A_n) = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j) \cup (A_{j+1} \cup \ldots \cup A_n)$.
De asemenea, dacă $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt numerele 1, 2, ..., n scrise într-o altă ordine, atunci
$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n},$$
$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}.$$

24. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{1, 3, 4\}$. Să se determine mulţimile $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ şi apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy.

25. Fie mulţimea $A = [1, 2] \cup [3, 4]$. Să se determine $A \times A$ şi apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy.

26. Fie mulţimea $B = [1, 2] \cup \{3, 4\}$. Să se determine mulţimea $B \times B$ şi apoi să se reprezinte grafic într-un plan de coordonate xOy.

§ 3. FUNCŢII

Cuvîntul „funcţie" este adesea utilizat în vorbirea curentă. Se spune, de exemplu, că recoltatul grîului se face în funcţie de starea vremii. Se spune, de asemenea, că nota pe care o obţine un elev, atunci cînd este ascultat, este în funcţie de răspunsurile pe care le dă. Ca şi în viaţa de toate zilele, conceptul de funcţie joacă un rol imens în toată matematica şi chiar în toată ştiinţa. În continuare ne vom ocupa de studiul conceptului matematic de funcţie.

3.1. Noţiunea de funcţie

Definiţie. **Fie A şi B două mulţimi. Prin *funcţie definită pe mulţimea A, cu valori în mulţimea B* se înţelege orice lege (procedeu sau convenţie etc.) f, în baza căreia *oricărui* element $a \in A$ i se asociază un *unic* element, notat $f(a)$, din B.**

Definiţia funcţiei presupune de fapt existenţa a *trei elemente*:

1° O mulţime A, pe care este definită funcţia şi care se numeşte *domeniul de definiţie al funcţiei.*

2° O a doua mulţime B, în care ia valori funcţia şi care se numeşte *domeniul valorilor funcţiei* sau *codomeniul funcţiei.*

3° O lege (procedeu, convenţie etc.) f.

Pentru a simboliza faptul că aceste trei elemente A, B, f sînt elementele constituante ale unei funcţii definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B se scrie simplu:

$$f : A \to B \text{ sau } A \xrightarrow{f} B$$

şi se citeşte „f definită pe A cu valori în B".

Dacă $a \in A$, atunci elementul $f(a) \in B$ se numeşte *imaginea* lui a prin funcţia respectivă, sau *valoarea lui f în a.*

O funcţie $f : A \to B$ se mai numeşte şi *aplicaţie* de la A la B.

Observaţii. 1) Deşi în definiţia unei funcţii $A \xrightarrow{f} B$ apar în mod necesar trei elemente, totuşi, uneori *pentru simplificarea limbajului, se spune că „f este o funcţie"*, urmînd ca celelalte două elemente să rezulte din context.

2) Dacă A şi B sînt două mulţimi oarecare, atunci, în general, există mai multe funcţii definite pe A cu valori în B.

3) Două funcţii $f : A \to B$ şi $g : A' \to B'$ se *numesc egale* dacă $A = A'$, $B = B'$ şi în plus, pentru orice element $a \in A$, avem $f(a) = g(a)$. Dacă există cel puţin un element $a \in A$ pentru care $f(a) \neq g(a)$, atunci funcţiile f şi g nu sînt egale. Cînd funcţiile f şi g sînt egale notăm $f = g$; în cazul cînd nu sînt egale notăm $f \neq g$.

4) Fie $f : A \to B$ o funcţie. Dacă x desemnează un element oarecare din A, iar y desemnează elementul $f(x)$, atunci vom scrie: $y = f(x)$. Această egalitate poartă numele de *dependenţă funcţională* asociată funcţiei f, iar x se numeşte *variabilă* sau *argument*. Ori de cîte ori ne este clar cine este domeniul şi codomeniul funcţiei f, putem să indicăm pentru această funcţie numai dependenţa funcţională $y = f(x)$.

Exemple. 1) Fie mulţimile $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Definim funcţia $f : A \to B$ după „legea": lui a i se asociază 1; lui b i se asociază 2; lui c i se asociază 2; lui d i se asociază 5. Pentru această funcţie avem: $f(a) = 1$; $f(b) = 2$; $f(c) = 2$ şi $f(d) = 5$.

De asemenea, de la A la B putem defini funcţia $g : A \to B$ după legea: oricărui element x din A i se asociază numărul 1.

Pentru funcţia g avem: $g(a) = g(b) = g(c) = g(d) = 1$.

Se vede că funcţiile f şi g nu sînt egale.

2) Fie A mulţimea tuturor ţărilor de pe glob, iar B mulţimea tuturor oraşelor de pe glob.

Definim funcţia $f : A \to B$ după legea: unei ţări i se asociază capitala sa.

Pentru această funcţie avem de exemplu: f (România) = Bucureşti, f (Italia) = = Roma etc.

3) Fie $\mathbf{Z}$ mulţimea numerelor întregi. Definim funcţia $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ după legea: lui $a \in \mathbf{Z}$ i se asociază pătratul său, adică $f(a) = a^2$.

3.2. Moduri de a defini o funcţie

Cînd definim o funcţie trebuie să precizăm cele trei elemente ce o caracterizează: domeniul de definiţie, domeniul valorilor şi legea de asociere. Vom distinge două moduri de a defini o funcţie.

a) *Funcții definite sintetic.* În multe cazuri o funcție $f : A \to B$ poate fi definită, *numind pentru fiecare element în parte din A elementul ce i se asociază din mulțimea B*".

Exemplu. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 7, 9\}$.
Definim $f : A \to B$ punînd: $f(1) = 1$; $f(2) = 7$; $f(3) = 1$ și $f(4) = 9$.

Legea de asociere a funcției $f: A \to B$ poate fi reprezentată grafic printr-o diagramă (fig. II.6) sau printr-un tabel (fig. II.7). (În figura II.6 săgețile indică legea de definire a funcției de la mulțimea A la B. În tabelul din figura II.7 în prima linie sînt trecute elementele mulțimii pe care este definită funcția, iar în linia a doua elementele din mulțime unde funcția ia valori).

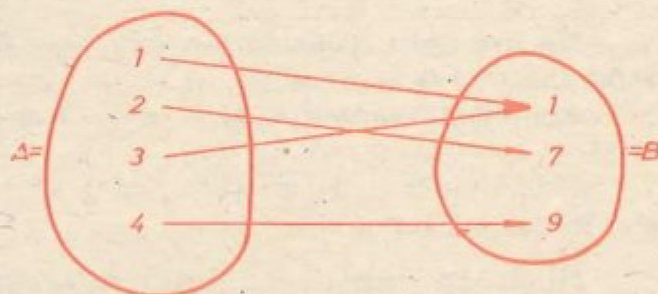


Fig. II.6

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	7	1	9

Fig. II.7

Pentru orice funcție definită sintetic se poate asocia o diagramă ca în figura II.6 sau un tabel (numit *tabelul de valori al funcției*), ca în figura II.7.

De multe ori este preferabil și sugestiv să indicăm diagrama sau tabelul de valori pentru a defini funcția respectivă.

De exemplu, să considerăm diagrama din figura II.8.

Funcția asociată este: $f : A \to B$ unde $f(a) = -1$; $f(b) = -1$; $f(c) = 2$ și $f(d) = 4$.

Sau să considerăm tabelul din figura II.9.

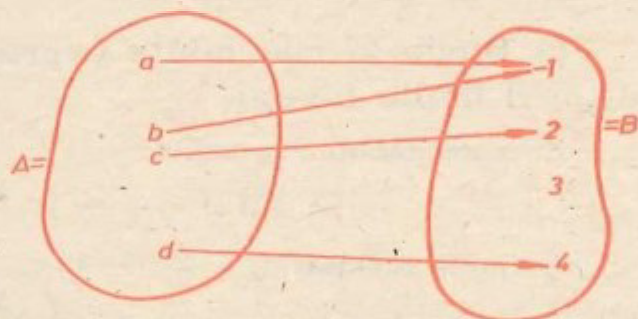


Fig. II.8

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	7	10	13

Fig. II.9

Funcția asociată este $f : \{a, b, c, d\} \to \{1, 7, 10, 13\}$, unde $f(a) = 1$; $f(b) = 7$; $f(c) = 10$ și $f(d) = 13$.

b) *Funcții definite analitic. O funcție $f : A \to B$ poate fi definită specificînd o proprietate (sau relațiile) ce leagă un element arbitrar $a \in A$ de elementul $f(a)$ din B.*

Exemple. 1) Fie A mulțimea tuturor oamenilor din România, iar $\mathbf{N}$ mulțimea numerelor naturale.

Definim funcția: $f : A \to \mathbf{N}$ astfel:

$f(x)$ este egală cu vîrsta (în ani) a lui x în momentul de față.

2) Fie B mulţimea oraşelor din România iar C mulţimea judeţelor ţării. Definim funcţia $f : B \to C$ astfel:

$f(x)$ = judeţul căruia îi aparţine oraşul x.

3) Dîndu-se o formulă (sau expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcţie sau mai multe funcţii. (Întotdeauna aceste funcţii vor avea domeniul şi codomeniul, submulţimi ale mulţimii numerelor reale.)

De exemplu, considerăm expresia $E(x) = x^2 + 1$. Putem defini funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = x^2 + 1$.

Aceleiaşi expresii $E(x) = x^2 + 1$ putem să-i asociem şi funcţia $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$; $g(x) = x^2 + 1$.

Este evident că funcţiile f şi g sînt diferite deoarece domeniul de definiţie al lui f este $\mathbf{R}$, iar al lui g este $\mathbf{Z}$.

Reţinem faptul că unei *expresii sau formule i se pot asocia mai multe funcţii.*

De asemenea, cînd definim o funcţie cu ajutorul unei expresii *algebrice trebuie să avem în vedere dacă acea expresie are sens* pentru elementele din domeniul de definiţie.

De exemplu, să considerăm expresia:

$$E(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Acestei expresii nu-i putem asocia o funcţie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, deoarece expresia $E(x)$ nu are sens pentru $x = 1$.

4) Dîndu-se mai multe expresii algebrice putem să definim o funcţie sau mai multe funcţii.

Să considerăm expresiile:

$$E_1(x) = x + 2,\ E_2(x) = x^2 \text{ şi } E_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Definim funcţia:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ astfel}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Aceloraşi expresii putem să le asociem şi funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată în felul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Se observă imediat că avem $f(2) = \frac{1}{2}$, iar $g(2) = 4$, deci f şi g sînt funcţii distincte.

Într-un mod asemănător putem defini o funcţie prin patru, cinci sau chiar un număr mai mare de formule.

2) Fie B mulţimea oraşelor din România iar C mulţimea judeţelor ţării. Definim funcţia $f : B \to C$ astfel:

$f(x)$ = judeţul căruia îi aparţine oraşul x.

3) Dîndu-se o formulă (sau expresie algebrică) $E(x)$, putem să-i asociem o funcţie sau mai multe funcţii. (Întotdeauna aceste funcţii vor avea domeniul şi codomeniul, submulţimi ale mulţimii numerelor reale.)

De exemplu, considerăm expresia $E(x) = x^2 + 1$. Putem defini funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = x^2 + 1$.

Aceleiaşi expresii $E(x) = x^2 + 1$ putem să-i asociem şi funcţia $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$; $g(x) = x^2 + 1$.

Este evident că funcţiile f şi g sînt diferite deoarece domeniul de definiţie al lui f este $\mathbf{R}$, iar al lui g este $\mathbf{Z}$.

Reţinem faptul că unei *expresii sau formule i se pot asocia mai multe funcţii.*

De asemenea, cînd definim o funcţie cu ajutorul unei expresii *algebrice trebuie să avem în vedere dacă acea expresie are sens* pentru elementele din domeniul de definiţie.

De exemplu, să considerăm expresia:

$$E(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Acestei expresii nu-i putem asocia o funcţie $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, deoarece expresia $E(x)$ nu are sens pentru $x = 1$.

4) Dîndu-se mai multe expresii algebrice putem să definim o funcţie sau mai multe funcţii.

Să considerăm expresiile:

$$E_1(x) = x + 2,\ E_2(x) = x^2 \text{ şi } E_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Definim funcţia:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ astfel}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0, \\ x^2, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Aceloraşi expresii putem să le asociem şi funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată în felul următor:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < -1, \\ x^2, & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 2. \end{cases}$$

Se observă imediat că avem $f(2) = \frac{1}{2}$, iar $g(2) = 4$, deci f şi g sînt funcţii distincte.

Într-un mod asemănător putem defini o funcţie prin patru, cinci sau chiar un număr mai mare de formule.

Exemple. 1) Fie funcția $f : \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 3\right\} \rightarrow \{-\sqrt{2}, 1, 2\}$ asociată tabelului

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	1	2	$-\sqrt{2}$

Graficul funcției f este: $G_f = \left\{(-1, -\sqrt{2}), (0, 1), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (3, -\sqrt{2})\right\}$.

Reprezentarea geometrică a mulțimii G_f este mulțimea punctelor P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. II.11).

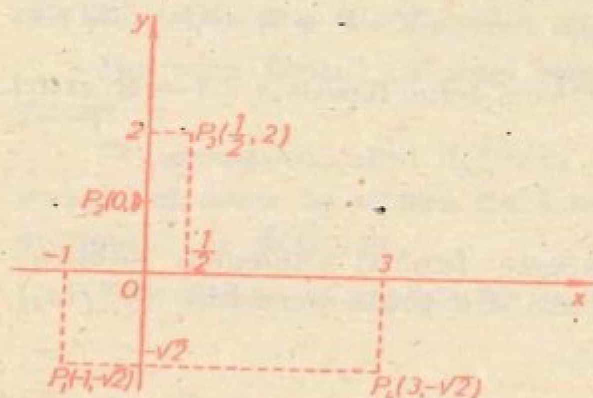


Fig. II.11

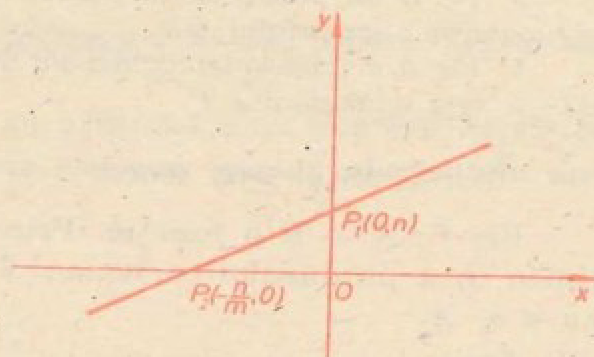


Fig. II.12

2) Fie funcția de gradul întîi $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = mx + n$ unde $m, n \in \mathbf{R}$ și $m \neq 0$. Graficul acestei funcții este mulțimea

$$G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in \mathbf{R}\} = \{(a, ma + n) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Reprezentarea geometrică a graficului funcției de gradul întîi $f(x) = mx + n, m \neq 0$, este o dreaptă care taie axele în punctele $P_1(0, n)$ și $P_2\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$ (fig. II.12).

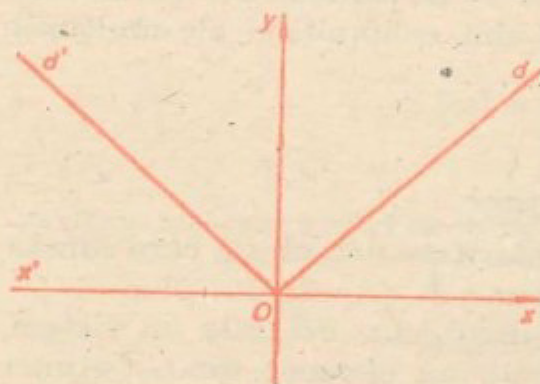


Fig. II.13

3) Fie funcția *modul* $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = |x|$ unde

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0, \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Graficul acestei funcții este constituit din două semidrepte d și d' (fig. II.13) unde d este bisectoarea unghiului xOy, iar d' este bisectoarea unghiului $x'Oy$.

Observație. Cînd avem o funcție numerică, o problemă care se pune este de a trasa graficul acestei funcții, adică de a vedea ce figură geometrică reprezintă acest grafic în plan. Acest lucru va fi făcut pentru fiecare caz în parte.

3.5. Funcţii injective, surjective, bijective

Definiţie. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Vom spune că f este o funcţie *injectivă* sau că este o *injecţie*, dacă pentru oricare două elemente x şi y ale lui A, $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$.

Faptul că funcţia f este injectivă se mai exprimă şi astfel: dacă x şi y sînt elemente oarecare din A cu proprietatea $f(x) = f(y)$, atunci rezultă $x = y$.

Din definiţie rezultă că o funcţie $f: A \to B$ *nu este injectivă* dacă există cel puţin două elemente x şi y din A, $x \neq y$, astfel încît $f(x) = f(y)$.

Exemple de funcţii injective

1) Funcţia $f : A \to B$, asociată diagramei din figura II.14 este o funcţie injectivă.

2) Funcţia $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită prin formula $g(x) = x^2$, este injectivă. Într-adevăr să presupunem că $g(x) = g(y)$ unde $x, y \in \mathbf{N}$. Atunci $x^2 = y^2$ de unde $(x - y)(x + y) = 0$.

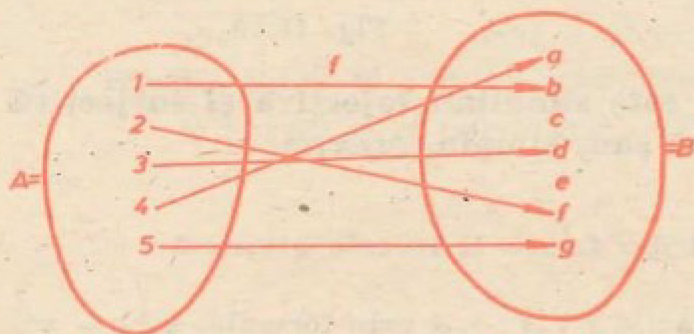


Fig. II.14

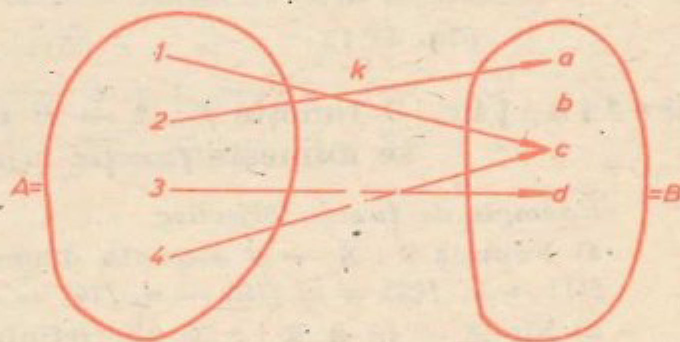


Fig. II.15

Din această egalitate rezultă că $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Din prima egalitate avem că $x = y$. Dacă are loc egalitatea $x + y = 0$, cum x şi y sînt numere naturale, obţinem că $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă că $x = y$ şi deci g este o funcţie injectivă.

3) Funcţia $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $h(x) = x^2$ nu este o funcţie injectivă deoarece $h(-2) = h(2) = 4$.

4) Funcţia $k : A \to B$ asociată diagramei din figura II.15 nu este injectivă, deoarece $k(1) = k(4) = c$.

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ este o funcţie *surjectivă* sau, simplu, este o *surjecţie* dacă pentru orice element $b \in B$ există cel puţin un element $a \in A$, astfel încît $f(a) = b$.

Rezultă că o funcţie $f : A \to B$ *nu este surjectivă* dacă există cel puţin un element $b \in B$, astfel încît pentru orice element $x \in A$ avem $f(x) \neq b$.

Exemple de funcţii surjective

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin relaţia $f(x) = ax$, $a \neq 0$, este surjectivă. Într-adevăr, fie $y \in \mathbf{R}$. Atunci $x = \frac{y}{a} \in \mathbf{R}$ şi avem $f\left(\frac{y}{a}\right) = a\frac{y}{a} = y$.

2) Funcţia $g : A \to B$ asociată diagramei din figura II.16 este de asemenea surjectivă. $g(1) = a$, $g(2) = g(3) = b$, $g(4) = c$, $g(5) = a$.

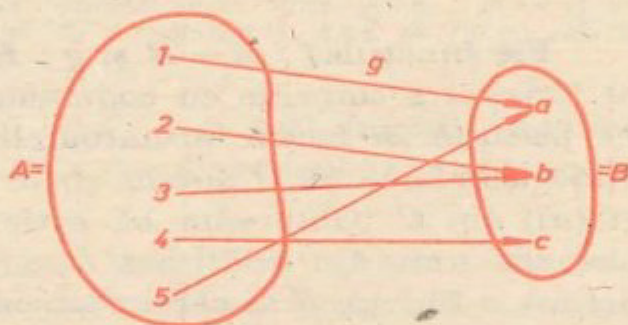


Fig. II.16

3) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin formula $h(x) = x^2$ nu este surjectivă. Într-adevăr pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $h(x) = x^2 \neq -1$. Deci -1 nu este imaginea nici unui element, prin h, din domeniul de definiţie.

4) Funcţia $k : A \to B$ asociată diagramei din figura II.17 nu este surjectivă.

Într-adevăr se vede că elementul $2 \in B$ nu este imaginea prin k a nici unui element din A.

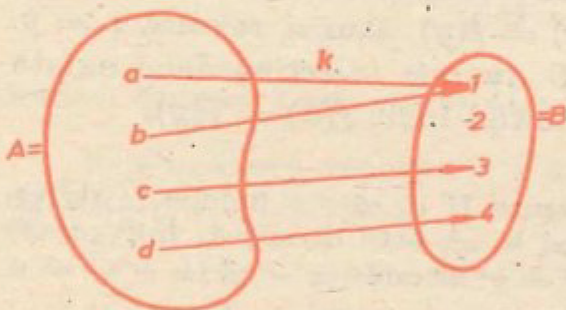


Fig. II.17

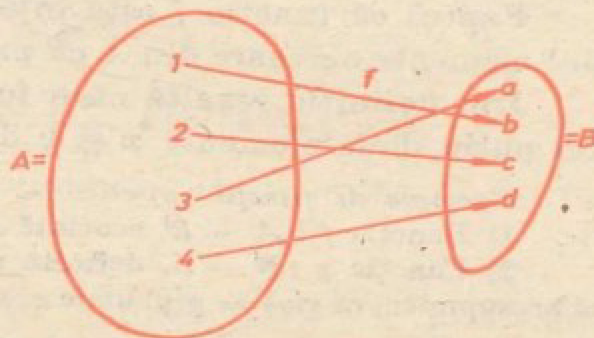


Fig. II.18

Definiţie. O funcţie $f : A \to B$ care este simultan injectivă şi surjectivă se numeşte *funcţie bijectivă* sau, simplu, *bijecţie*.

Exemple de funcţii bijective

1) Funcţia $f : A \to B$ asociată diagramei din figura II.18 este bijectivă: $f(1) = b$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = d$.

2) Fie $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0\}$. Definim funcţia $g : A \to A$ prin formula: $g(x) = x^2$. Funcţia g este bijectivă. Într-adevăr, trebuie să arătăm că g este injectivă şi surjectivă.

Funcţia *g este injectivă*. Fie $x, y \in A$ astfel încît $g(x) = g(y)$. Atunci $x^2 = y^2$, de unde $(x - y)(x + y) = 0$ şi deci $x - y = 0$ sau $x + y = 0$. Dacă $x - y = 0$, avem $x = y$; dacă $x + y = 0$, avem $x = -y$ şi cum x, y sînt numere reale $\geqslant 0$ trebuie ca $x = y = 0$. Oricum, din egalitatea $g(x) = g(y)$ rezultă $x = y$.

Funcţia *g este surjectivă*. Fie $y \in A$. Cum $y \geqslant 0$, atunci are sens $\sqrt{y}$. Cum $\sqrt{y} \geqslant 0$, atunci $\sqrt{y} \in A$. Se vede că $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ şi deci g este surjectivă.

3) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq 0$ este bijectivă.

Într-adevăr, dacă $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $ax_1 + b = ax_2 + b$, de unde obţinem $ax_1 = ax_2$. Cum $a \neq 0$, atunci $x_1 = x_2$. Deci f este injectivă. Să arătăm că f este şi surjectivă. Fie $y \in \mathbf{R}$. Are sens numărul real $x = \frac{y}{a} - \frac{b}{a}$. Atunci $f(x) = a\left(\frac{y}{a} - \frac{b}{a}\right) + b = y$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

3.6. Compunerea funcţiilor

Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$. Observăm, că domeniul de definiţie al funcţiei g coincide cu codomeniul funcţiei f. Această situaţie particulară ne permite să facem următoarele consideraţii. Fie $a \in A$; atunci elementul $f(a)$ găsindu-se în B putem vorbi de imaginea sa prin g, adică de elementul $g(f(a))$ din C. Observăm că astfel putem asocia oricărui element $a \in A$ un element unic din mulţimea C, anume elementul $g(f(a))$. În felul acesta am definit o funcţie h al cărei domeniu de definiţie este cel al funcţiei f, iar codomeniul este cel al funcţiei g. Deci $h : A \to C$ unde $h(a) = g(f(a))$ pentru

orice $a \in A$. De obicei funcţia h astfel definită se notează $g \circ f$ (sau gf) şi se numeşte *compunerea funcţiei g cu funcţia f*. (În figura II.19 este reprezentat modul de definire al funcţiei $g \circ f$.)

Fig. II.19

Exemple. 1) Considerăm funcţiile $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ definite respectiv prin diagramele din figura II.20.

În acest caz avem $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = t$; $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = t$; $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = q$; $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4) = m$.

Funcţia $g \circ f : A \to C$ poate fi reprezentată prin diagrama din figura II.21.

2) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funcţiile definite respectiv prin formulele:

$$f(x) = x^2 - 1; \quad g(x) = 1 + x^2.$$

Funcţia $g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are sens. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 1 + (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

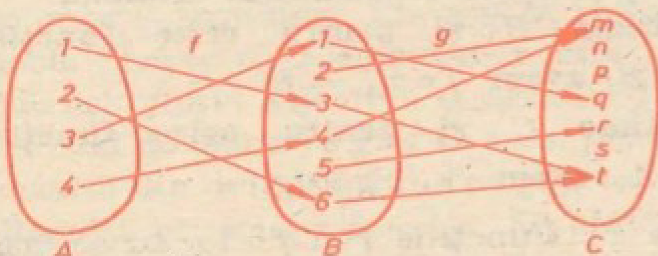


Fig. II.20

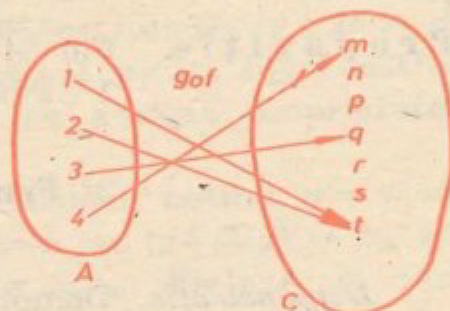


Fig. II.21

Deci funcţia compusă $g \circ f$ este dată de formula:

$$(g \circ f)(x) = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Se observă că are sens să vorbim şi de compunerea lui f cu g. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = (1 + x^2)^2 - 1 = x^4 + 2x^2.$$

Deci funcţia $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este dată de formula:

$$(f \circ g)(x) = x^4 + 2x^2.$$

Observaţii. 1) Dacă $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ sînt două funcţii, are sens să vorbim de compunerea funcţiei g cu funcţia f numai atunci cînd $B = C$.

2) Dacă $f : A \to B$ şi $g : B \to A$ sînt două funcţii are sens $g \circ f : A \to A$ şi $f \circ g : B \to B$. Aşa cum rezultă şi din exemplul 2) în general $g \circ f \neq f \circ g$, adică compunerea, nu este *comutativă*.

Teoremă. **Fie $f : A \to B$, $g : B \to C$ şi $h : C \to D$ trei funcţii. Atunci fiecare din funcţiile $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ are sens şi există egalitatea: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.**

Demonstraţie. Codomeniul funcţiei $g \circ f$ este mulţimea C. Cum domeniul de definiţie a lui h este tot C, atunci are sens compunerea $h \circ (g \circ f)$. Analog, domeniul de definiţie al funcţiei $h \circ g$ este B, iar codomeniul lui f fiind tot B

are sens compunerea $(h \circ g) \circ f$. Funcţiile $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ au acelaşi domeniu de definiţie (mulţimea A) şi acelaşi codomeniu (mulţimea D).

Pentru a arăta egalitatea $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ rămîne să dovedim că pentru orice $x \in A$ avem $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

Într-adevăr $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, iar $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$.

Comparînd, obţinem egalitatea cerută.

Observaţie. Proprietatea demonstrată în teorema de mai sus se numeşte *asociativitatea compunerii* funcţiilor.

Această proprietate ne permite să folosim scrierea

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f.$$

3.7. Funcţia inversă

Fie A o mulţime oarecare. Vom nota cu $1_A : A \to A$ funcţia definită astfel: $1_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$. 1_A se numeşte *funcţia identică a mulţimii A*.

P r o p o z i ţ i e. **Fie A o mulţime şi 1_A funcţia sa identică. Atunci:**

1° Pentru orice mulţime B şi pentru orice funcţie $f : A \to B$, avem $f \circ 1_A = f$.

2° Pentru orice mulţime C şi pentru orice funcţie $g: C \to A$, avem $1_A \circ g = g$.

Demonstraţie. Demonstrăm afirmaţia 1°. Funcţiile f şi $f \circ 1_A$ au acelaşi domeniu şi codomeniu aşa că pentru a arăta egalitatea $f \circ 1_A = f$ rămîne să dovedim că pentru orice $a \in A$, $(f \circ 1_A)(a) = f(a)$.

Într-adevăr $(f \circ 1_A)(a) = f(1_A(a)) = f(a)$.

Demonstrăm afirmaţia 2°. Funcţiile $1_A \circ g$ şi g au acelaşi domeniu şi codomeniu, adică mulţimile C respectiv A.

Pentru a arăta egalitatea $1_A \circ g = g$ rămîne să dovedim că pentru orice $c \in C$ avem $(1_A \circ g)(c) = g(c)$.

Într-adevăr $(1_A \circ g)(c) = 1_A(g(c)) = g(c)$.

D e f i n i ţ i e. **O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *inversabilă* dacă există o funcţie $g: B \to A$ astfel încît**

$$g \circ f = 1_A \quad \text{şi} \quad f \circ g = 1_B. \qquad (1)$$

Observăm că funcţia g definită de relaţiile (1) este unică. Într-adevăr, dacă $g' : B \to A$ este o altă funcţie astfel încît

$$g' \circ f = 1_A \quad \text{şi} \quad f \circ g' = 1_B, \qquad (2)$$

atunci obţinem:

$$g = 1_A \circ g = (g' \circ f) \circ g = g' \circ (f \circ g) = g' \circ 1_B = g',$$

unde s-au utilizat relaţiile (1) şi (2) precum şi asociativitatea compunerii funcţiilor.

Dacă f este o funcţie inversabilă, atunci funcţia g definită de relaţiile (1), care este unică, se numeşte *inversa funcţiei* f şi se notează f^{-1}.

Se pune întrebarea, cînd este o funcţie inversabilă? Răspunsul este dat de următoarea toeremă.

T e o r e m ă. O funcţie $f: A \to B$ este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă.

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi că f este inversabilă şi să arătăm că f este injectivă şi surjectivă. Din faptul că f este inversabilă rezultă că există $f^{-1}: B \to A$ astfel încît

$$f^{-1} \circ f = 1_A \text{ şi } f \circ f^{-1} = 1_B. \tag{3}$$

Fie x_1, x_2 din A şi să presupunem că $f(x_1) = f(x_2)$. Din prima dintre relaţiile (3) obţinem că $x_1 = 1_A(x_1) = (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (f^{-1} \circ f)(x_2) = 1_A(x_2) = x_2$. Deci f este injectivă. Fie $y \in B$. Din a doua dintre relaţiile (3) se obţine: $y = 1_B(y) = (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y))$. Dacă se notează $x = f^{-1}(y)$, atunci $y = f(x)$, ceea ce arată că f este şi surjectivă.

Reciproc, presupunem că f este bijectivă. Definim funcţia $g: B \to A$ în modul următor. Fie $y \in B$. Deoarece f este surjectivă există $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$. Elementul x este unic determinat cu această proprietate, întrucît f este injectivă şi definim $g(y) = x$.

Să dovedim că $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$. Fie $x \in A$. Atunci, notînd $y = f(x)$, rezultă din definiţia lui g că $g(y) = x$ şi deci $g(f(x)) = x$ sau $(g \circ f)(x) = 1_A(x)$. Rezultă atunci $g \circ f = 1_A$. Să arătăm acum că $f \circ g = 1_B$. Fie $y \in B$. Din definiţia lui g, $g(y) = x$, unde x este elementul din A pentru care $f(x) = y$. Atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = 1_B(y)$, de unde obţinem că $f \circ g = 1_B$.

Observaţie. Din demonstraţia teoremei precedente rezultă că dacă $f: A \to B$ este o funcţie bijectivă, atunci funcţia sa inversă $f^{-1}: B \to A$ se *defineşte după următorul procedeu*: dacă $b \in B$, atunci $f^{-1}(b)$ *este unicul element* $a \in A$, *astfel încît* $f(a) = b$.

Exemple: 1) Fie funcţia $f: A \to B$ asociată diagramei din figura II.22:

$f(1) = c$, $f(2) = a$, $f(3) = e$, $f(4) = d$, $f(5) = b$.

Se vede că f este o funcţie bijectivă. Atunci există funcţia inversă $f^{-1}: B \to A$.

Vom avea: $f^{-1}(a) = 2$; $f^{-1}(b) = 5$; $f^{-1}(c) = 1$; $f^{-1}(d) = 4$; $f^{-1}(e) = 3$. Funcţia f^{-1} are diagrama reprezentată în figura II.23.

Se observă că diagrama funcţiei f^{-1} se obţine din aceea a lui f, inversînd sensul săgeţilor.

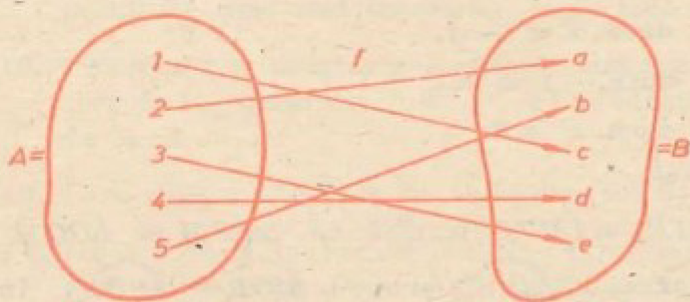


Fig. II.22

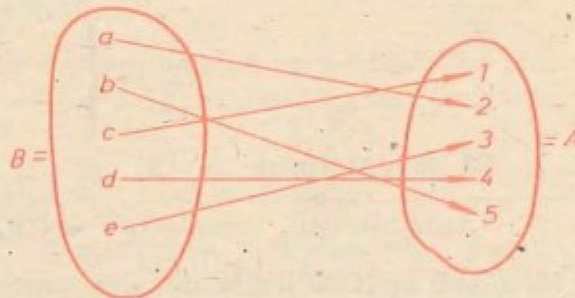


Fig. II.23

2) Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$ unde $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq 0$. Această funcţie este bijectivă, deci putem vorbi de inversa sa. Fie $y \in \mathbf{R}$. Atunci $f^{-1}(y) = x$ unde $f(x) = y$. Deci dat $y \in \mathbf{R}$ trebuie să determinăm $x \in \mathbf{R}$, astfel încît $f(x) = y$ sau $ax + b = y$. Din $ax + b = y$ obţinem că $x = \frac{y - b}{a} = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}$. Deci, $f^{-1}(y) = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}$. Folosind notaţia cu x, atunci funcţia inversă a lui f este:

$$f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ unde } f^{-1}(x) = \frac{1}{a} x - \frac{b}{a}.$$

Interpretarea geometrică a inversei unei funcţii numerice

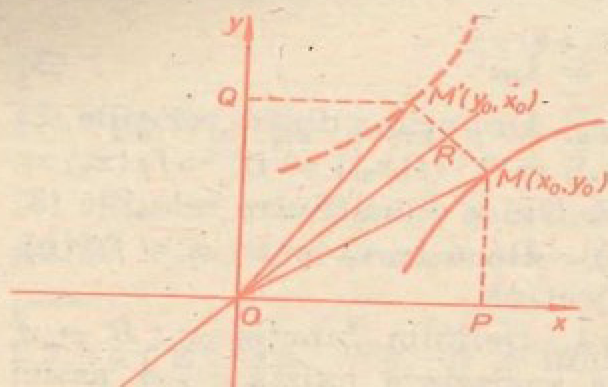


Fig. II.24

Fie $f: A \to B$ o funcţie numerică inversabilă şi $f^{-1}: B \to A$ funcţia inversă a lui f. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcţiei f (fig. II.24). Atunci $y_0 = f(x_0)$ şi deci $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Rezultă că punctul $M'(y_0, x_0)$ aparţine graficului funcţiei f^{-1} (reprezentat punçtat în figura II.24). Dar M şi M' sînt simetrice faţă de bisectoarea unghiului xOy (numită prima bisectoare)*. Rezultă că graficele funcţiilor f şi f^{-1} sînt simetrice faţă de prima bisectoare.

Observaţie. Ca exerciţiu, să formalizăm în termeni logici cîteva din definiţiile date în acest paragraf.

1) Definiţia funcţiei injective, $f : A \to B$, se scrie:

(f injectivă) $\Leftrightarrow (\forall x)\ (\forall y)\ [(x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))]$, unde literele x, y desemnează elemente din A.

Faptul că f nu este injectivă se formalizează astfel:

(f nu este injectivă) $\Leftrightarrow (\exists x)\ (\exists y)\ [(x \neq y) \wedge (f(x) = f(y))]$.

2) Definiţia funcţiei surjective, $f : A \to B$, se scrie:

(f surjectivă) $\Leftrightarrow (\forall y)\ (\exists x)\ [y = f(x)]$,

unde y desemnează un element oarecare din B, iar x desemnează un element oarecare din A.

Faptul că f nu este surjectivă se formalizează astfel:

(f nu este surjectivă) $\Leftrightarrow (\exists y)\ (\forall x)\ [y \neq f(x)]$,

unde y desemnează un element din B, iar x desemnează un element oarecare din A.

Propunem cititorului să formalizeze şi alte definiţii întîlnite.

EXERCIŢII

1. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită astfel

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & \text{dacă } x < -1, \\ -7, & \text{dacă } -1 \leqslant x < 3. \\ -3x + 2, & \text{dacă } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Să se determine $f(-2)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$.

---

* Într-adevăr, cum $(OP) \equiv (OQ)$ şi $(MP) \equiv (M'Q)$ rezultă că $\Delta OPM \equiv \Delta OQM'$ deci $(OM) \equiv (OM')$. Pe de altă parte $m(\widehat{POM}) = m(\widehat{QOM'})$ şi deci $\widehat{MOR} \equiv \widehat{M'OR}$). În $\Delta MOM'$ care este isoscel, dreapta OR este bisectoare deci şi mediană. Rezultă că $MR = M'R$, adică M şi M' sînt simetrice faţă de dreapta OR.

2. Fie funcţia $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7\}$ definită astfel:

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5 \text{ şi } f(4) = 7$$

şi funcţia $g : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 3, 5, 7\}$ definită astfel: $g(x) = 2x - 1$. Să se arate că $f = g$.

3. Se poate asocia expresiei $E = \frac{X}{X^2 - 1}$ o funcţie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încît $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$?

4. Folosindu-se diagrama asociată unei funcţii, să se determine numărul tuturor funcţiilor definite pe mulţimea $\{1, 2\}$ cu valori în mulţimea $\{3, 5\}$.

5. Fie funcţia $f : \mathbf{Z} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definită după legea: $f(x)$ este restul împărţirii lui x la 6. Să se determine $f(-12)$, $f(-9)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(272)$.

6. Există un număr întreg m astfel încît să existe o funcţie $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ definită după formula $f(x) = x^2 + m$?

7. Fie funcţia $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{2, 4, 6\}$ definită astfel: $f(1) = 4$; $f(2) = 2$; $f(3) = 2$; $f(4) = 6$. Să se traseze graficul acestei funcţii.

8. Folosind faptul că graficul funcţiei de gradul întîi este o dreaptă să se traseze graficele următoarelor funcţii:

a) $f_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $f_1(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă } x \leqslant -1, \\ -5, \text{ dacă } x > -1; \end{cases}$

b) $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $f_2(x) = \begin{cases} 2x - 3, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ 7x, \text{ dacă } x > 0; \end{cases}$

c) $f_3 : [-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$; $f_3(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x \leqslant 1, \\ 3x - 1, \text{ dacă } x > 1; \end{cases}$

d) $f_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$; $f_4(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ dacă } x \leqslant -1, \\ 5, \text{ dacă } -1 < x < 3, \\ \frac{7}{3}x - 2, \text{ dacă } x \geqslant 3; \end{cases}$

e) $f_5: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, $f_5(n) = 2n + 1$;

f) $f_6: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, $f_6(x) = 3x - 2$.

9. Să notăm cu A mulţimea oamenilor de pe glob. Definim funcţia $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ după legea „$f(x)$ = înălţimea lui x". Este f injectivă? Dar surjectivă?

10. Să se arate că funcţia din exerciţiul 5) este surjectivă, dar nu este injectivă.

11. Fie mulţimea $A = \{0, 1\}$. Să se construiască toate funcţiile de la A la A şi să se precizeze care sînt injective, surjective sau bijective.

12. Folosindu-se diagrama asociată unei funcţii să se determine numărul funcţiilor injective de la mulţimea $A = \{1, 2\}$ în mulţimea $B = \{3, 5, 7\}$. Există funcţii surjective de la A la B?

13. Care dintre funcţiile de la exerciţiul 8) sînt injective? Dar surjective?

14. Notăm cu A mulţimea oraşelor ţării noastre, iar B mulţimea judeţelor ţării noastre. Definim funcţia $f : A \rightarrow B$ după legea „$f(a)$ = judeţul pe teritoriul căreia se află a" şi funcţia $g : B \rightarrow A$ după legea „$g(b)$ = oraşul care este reşedinţa judeţului b ".

i) Cine este f(Galați) și f(Făgăraș)? Cine este g(Teleorman) și g(Mehedinți)?

ii) Să se arate că f este surjectivă și g injectivă.

iii) Să se arate că $f \circ g = 1_B$ și $g \circ f \neq 1_A$.

15. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite respectiv prin formulele:

$$f(x) = x^2 + x - 1; \; g(y) = y^2 - y + 1.$$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

16. Considerăm funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 7x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant -2, \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > -2. \end{cases}$

Să se determine $g \circ f$ și $f \circ g$.

17. Fie A o mulțime finită și $f : A \to A$ o funcție. Să se arate că : f bijectivă $\Leftrightarrow f$ injectivă $\Leftrightarrow f$ surjectivă.

18. Considerăm funcțiile $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Să se arate că:

i) dacă f și g sînt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

ii) dacă f și g sînt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

19. Să se determine numărul funcțiilor bijective de la mulțimea $\{1, 2, 3\}$ în mulțimea $\{1, 2, 3\}$.

20. Fie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ funcția definită astfel: $f(0) = 1$; dacă $n \geqslant 1$ atunci $f(n)$ este ultima cifră a numărului 7^n.

i) Calculați $f(1), f(2), \ldots, f(7)$.

ii) Să se arate că $f(n + 4) = f(n)$ pentru orice $n \geqslant 1$.

iii) Trasați graficul funcției f.

21. Arătați că două funcții $f : A \to B$ și $g : A \to B$ sînt egale dacă și numai dacă graficele lor sînt egale.

22. Considerăm funcțiile definite respectiv prin formulele:

i) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$; $f(x) = -x + 4$;

ii) $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$; $g(x) = x + 1$;

iii) $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$; $h(x) = x^2$;

iv) $k : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$; $k(x) = x^2$.

Să se arate că f, g sînt bijective. Cum sînt h și k?

Să se determine funcțiile inverse pentru f și g.

23. Considerăm funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, definită astfel:

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{dacă } n \text{ este număr par,} \\ n - 1, & \text{dacă } n \text{ este număr impar.} \end{cases}$$

Arătați că f este o bijecție și construiți inversa sa.

24. Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ 3x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Să se arate că f este bijectivă și să se determine inversa sa.

CAPITOLUL III

NUMERE REALE

§1. REPREZENTAREA NUMERELOR RAȚIONALE SUB FORMĂ DE FRACȚII ZECIMALE (PERIODICE)

1.1. Noțiuni preliminarii

În practică se folosește, de obicei, reprezentarea (scrierea) numerelor raționale sub formă de fracții zecimale.

Așa cum este cunoscut din aritmetică, cu ajutorul algoritmului de împărțire orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$ $(m \geqslant 0, n > 0)$ se reprezintă sub forma unei fracții zecimale finite sau infinite (adică, cu o infinitate de zecimale). Astfel în loc de $\frac{1}{4}$ se scrie 0,25; în loc de $\frac{5}{8}$ se scrie 0,625; în loc de $\frac{1}{3}$ se scrie 0,333.... Deoarece avem de-a face atît cu fracții zecimale finite, cît și cu fracții zecimale infinite, pentru uniformizare, se pot adăuga la dreapta fracției zecimale finite o infinitate de zerouri.

De exemplu: $\frac{1}{4} = 0,25000\ldots; \frac{5}{8} = 0,625000\ldots$.

Astfel putem spune că toate fracțiile zecimale sînt infinite.

Numerele întregi se reprezintă, evident, ca fracții zecimale cu o infinitate de zerouri după virgulă.

De exemplu: $5 = 5,000\ldots$; $13 = 13,000\ldots$.

Așadar, orice număr rațional nenegativ $\frac{m}{n}$, poate fi reprezentat sub forma unei fracții zecimale infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0,a_1a_2a_3\ldots .$$

Numărul a_0 se numește *partea întreagă* a lui $\frac{m}{n}$, iar

$$0,a_1a_2a_3\ldots$$

partea fracționară a sa. Numerele a_1, a_2, a_3,... sînt cuprinse între 0 și 9, adică $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, pentru $i = 1, 2, 3,\ldots$.

Observăm acum că și numerele raționale negative au o astfel de reprezentare. Vom nota partea întreagă a unui număr negativ cu semnul minus deasupra. Astfel numărul $-\frac{5}{2} = -3 + \frac{1}{2}$ se poate scrie sub forma $\overline{3},5000\ldots$.

Analog, $-0,321 = \overline{1},679000\ldots$;

$$-25\frac{2}{3} = -25,666\ldots = -26 + \frac{1}{3} = \overline{26},333\ldots .$$

În acest mod, orice număr rațional (negativ, pozitiv sau zero) se reprezintă sub forma unei fracții infinite:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1a_2a_3\ldots, \qquad (1)$$

unde a_0 este partea întreagă a lui $\frac{m}{n}$, iar

$$0, a_1a_2a_3\ldots$$

este partea fracționară (zecimală) a sa (a_0 este un număr întreg, iar a_1, a_2, a_3,... sînt numere cuprinse între 0 și 9).

Partea fracționară $0, a_1a_2a_3\ldots$ din reprezentarea (1) a oricărui număr rațional este un număr pozitiv mai mic decît 1. Reprezentarea numerelor raționale negative sub formă de fracție zecimală, infinită, cu partea întreagă număr negativ (iar partea fracționară un număr pozitiv) o vom face cu scopul de a uniformiza în continuarea acestui capitol studiul numerelor reale (pozitive și negative).

Observație. Scrierea numerelor negative sub forma indicată mai înainte se întîlnește în practică la calculul cu logaritmi.

1.2. Fracții zecimale periodice

Să vedem acum care sînt fracțiile zecimale prin care se reprezintă numerele raționale. Mai întîi, să definim fracția zecimală periodică.

D e f i n i ț i e. O fracție zecimală infinită

$$a_0,a_1a_2a_3\ldots$$

se numește *periodică*, dacă există numerele naturale k și p astfel încît

$$a_{n+p} = a_n, \textbf{ pentru orice } n \geqslant k.$$

O fracție zecimală periodică se notează, pe scurt, prin

$$a_0,a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_ka_{k+1}\ldots a_{k+p-1}).$$

Mulțimea cifrelor scrise (în această ordine) în paranteză se numește *perioada fracției zecimale*. Dacă $k = 1$, adică perioada începe imediat după virgulă, avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică simplă*; în caz contrar avem de-a face cu o *fracție zecimală periodică mixtă*.

În exemplele numerice de mai înainte fracțiile zecimale sînt periodice. Astfel, pentru 0,333... avem $k = 1$, $p = 1$ și $a_{n+1} = a_n = 3$, pentru orice $n \geqslant 1$. Scriem $0,333\ldots = 0,(3)$, aceasta fiind o fracție zecimală periodică

simplă. Fracţiile zecimale finite, care după cum am observat pot fi considerate ca fracţii zecimale infinite (prin adăugare de zerouri) sînt periodice. De exemplu, pentru 0,25000... avem $k = 3$, $p = 1$ şi $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 3$; iar pentru 0,625000... avem $k = 4$, $p = 1$, $a_{n+1} = a_n = 0$, pentru orice $n \geqslant 4$. Deci 0,25000... = 0,25(0), iar 0,625000... = 0,625(0). Aşadar acestea sînt fracţii zecimale periodice mixte. În sfîrşit, fracţia $\overline{15}$,723 434... este periodică şi se scrie, pe scurt, $\overline{15}$,72(34).

Am observat că reprezentarea unui număr raţional sub formă de fracţie zecimală se obţine cu ajutorul algoritmului de împărţire. Să considerăm, de exemplu, numerele $\frac{5}{33}$ şi $\frac{19}{55}$. Avem:

$$\begin{array}{r|l} 5 & 33 \\ \hline 50 & 0,15\ldots \\ 33 & \\ \hline 170 & \\ 165 & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 55 \\ \hline 190 & 0,345\ldots \\ 165 & \\ \hline 250 & \\ 220 & \\ \hline 300 & \\ 275 & \\ \hline 25 & \end{array}$$

Exemplul 1. *Exemplul 2.*

Fiecare număr de după virgulă se obţine printr-o împărţire parţială.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 33 \\ 33 & 1 \\ \hline 17 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 170 & 33 \\ 165 & 5; \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 190 & 55 \\ 165 & 3 \\ \hline 25 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 55 \\ 220 & 4 \\ \hline 30 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 300 & 55 \\ 275 & 5 \\ \hline 25 & \end{array}$$

Exemplul 1. *Exemplul 2.*

Fiecare deîmpărţit parţial se deduce din restul precedent prin adăugarea unui zero la dreapta sa, adică mărindu-l de zece ori. Resturile parţiale sînt toate mai mici decît împărţitorul. După un număr finit de operaţii parţiale se regăseşte deci, ori deîmpărţitul iniţial (exemplul 1), ori un rest deja întîlnit (exemplul 2). De la acest pas putem să nu mai continuăm împărţirea, deoarece în cîtul împărţirii lui 5 la 33, respectiv în cîtul împărţirii lui 19 la 55, cifrele se vor repeta. De aceea

$$\frac{5}{33} = 0,(15); \ \frac{19}{55} = 0,3(45).$$

În general, avem:

T e o r e m a 1. Orice număr raţional se reprezintă sub formă de fracţie zecimală infinită periodică, care nu are perioada (9).

| *Demonstraţie.* Dacă a este un număr raţional oarecare, atunci $a = a_0 + a'$, unde a_0 este un număr întreg (partea întreagă a lui a), iar a' este un număr raţional nenegativ mai mic decît 1. Dacă a' se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică, care nu are perioada (9), atunci şi a se reprezintă sub formă de fracţie zecimală periodică care nu are

---

Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative.

perioada (9), în care partea întreagă este a_0, iar partea fracționară îl reprezintă pe a. Așadar, pentru demonstrația teoremei este suficient să considerăm numai numere raționale $\frac{m}{n}$, astfel încît $0 \leqslant \frac{m}{n} < 1$. Fie deci $\frac{m}{n}$ ($m \geqslant 0$, $n > 0$) un astfel de număr rațional. Prin algoritmul de împărțire a lui m la n sînt posibile resturile:

$$0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

Deoarece resturile iau cel mult n valori, rezultă că după cel mult n pași ai algoritmului se repetă unul din ele. Deci va rezulta o fracție zecimală periodică.

Se arată că nu este posibil ca fracția zecimală periodică asociată unui număr rațional, să aibă perioada (9). Să presupunem, prin absurd, că fracția ar avea perioada (9). Atunci, prin algoritmul de împărțire, ajungem la un moment dat la un rest r astfel încît înmulțindu-l cu 10, și împărțindu-l la n, să se obțină un cît egal cu 9 și restul să fie, de asemenea, r. Deci după teorema împărțirii cu rest, avem:

$$10r = n \cdot 9 + r, \text{ cu } r < n.$$

De aici se obține $9r = 9n$, de unde $r = n$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza $r < n$.

Observație. Fracțiile zecimale finite (adică de perioadă (0)), se obțin atunci cînd prin algoritmul de împărțire se obține la un moment dat un rest egal cu zero. După aceasta toate resturile vor fi egale cu zero.

Împărțirile parțiale din exemplele precedente se scriu astfel:

Exemplul 1. $50 = 33 \cdot 1 + 17$; $170 = 33 \cdot 5 + 5$.

Înmulțind cu 10 prima relație, și folosind pe a doua avem, $500 = (33 \cdot 1 + 17) \cdot 10 = 33 \cdot 10 + 170 = 33 \cdot 10 + (33 \cdot 5 + 5) = 33 \cdot 15 + 5$.
Deci $100 \cdot 5 = 33 \cdot 15 + 5$, adică 15 este cîtul împărțirii lui $100 \cdot 5$ la 33.

Exemplul 2. $190 = 55 \cdot 3 + 25$; $250 = 55 \cdot 4 + 30$; $300 = 55 \cdot 5 + 25$.

Înmulțind cu 100 prima relație și folosind pe următoarele două avem $19\,000 = (55 \cdot 3 + 25) \cdot 100 = 55 \cdot 300 + 250 \cdot 10 = 55 \cdot 300 + (55 \cdot 4 + 30) \cdot 10 = 55 \cdot 300 + 55 \cdot 40 + 300 = 55 \cdot 340 + 55 \cdot 5 + 25 = 55 \cdot 345 + 25$.
Deci, $1\,000 \cdot 19 = 55 \cdot 345 + 25$ și $10 \cdot 19 = 55 \cdot 3 + 25$, adică 345 este cîtul împărțirii lui $1\,000 \cdot 19$ la 55, iar 3 este cîtul împărțirii lui $10 \cdot 19$ la 55.

În continuare vom observa că reciproca teoremei precedente este, de asemenea, adevărată.

Să dăm mai întîi două exemple:

1) Fie 0,(43) o fracție zecimală periodică simplă. Dacă există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît fracția dată să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire, atunci 43 este cîtul întreg al împărțirii lui $100\,m$ la n; mai mult, din motive de periodicitate, restul acestei împărțiri este egal cu m. Deci

$$100\,m = n \cdot 43 + m$$

de unde

$$99\,m = n \cdot 43.$$

Numărul rațional căutat este $\frac{m}{n} = \frac{43}{99}$.

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărțire pentru a vedea că numărul rațional $\frac{43}{99}$ se reprezintă sub forma fracției zecimale 0,(43).

2) Fie 0,41(23) o fracție zecimală periodică mixtă. Dacă există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît fracția dată să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire, atunci:

4 123 este cîtul întreg al împărțirii lui 10 000 m la n, iar 41 este cîtul întreg al împărțirii lui 100 m la n.

Mai mult, din motive de periodicitate, cele două resturi obținute sînt egale. Deci

$$10\,000\, m = n \cdot 4\,123 + r$$
$$100\, m = n \cdot 41 + r$$

și prin scădere se obține:

$$9\,900\, m = n \cdot (4\,123 - 41).$$

Numărul rațional căutat este:

$$\frac{m}{n} = \frac{4\,123 - 41}{9\,900} = \frac{4\,082}{9\,900}.$$

Verificare. Este suficient să aplicăm algoritmul de împărțire pentru a vedea că numărul rațional $\frac{4\,082}{9\,900}$ se reprezintă sub forma fracției zecimale 0,41(23).

În general, avem:

Teorema 2. Orice fracție zecimală periodică, care are perioada diferită de (9), reprezintă un anumit număr rațional, din care se obține prin algoritmul de împărțire.

Fie

$$a_0,\ a_1a_2 \dots a_{k-1}(a_k a_{k+1} \dots a_{k+p-1}) \qquad (1)$$

o fracție zecimală periodică, care nu are perioada (9). Trebuie să arătăm că există un număr rațional, astfel încît fracția dată (1) să se obțină din acesta prin algoritmul de împărțire. Nu vom da o demonstrație a acestei teoreme. Observăm însă că cele două exemple de mai înainte ne sugerează reguli de găsire, în general, a numărului rațional căutat. Astfel:

1°. Dacă $k = 1$, adică fracția este periodică simplă, avem:

$$a_0,\ (a_1a_2 \dots a_p) = a_0 + \frac{a_1a_2 \dots a_p}{\underbrace{99 \dots 9}_{p \text{ ori}}}$$

(în partea din dreapta a egalității de mai sus $a_1a_2 \dots a_p$ reprezintă numărul natural avînd cifrele $a_1, a_2, \dots, a_p$).

2°. Dacă $k > 1$, adică fracţia este periodică mixtă, avem:

$$a_0, \ a_1a_2\ldots a_{k-1}(a_k a_{k+1}\ldots a_{k+p-1}) =$$

$$= a_0 + \frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}a_ka_{k+1}\ldots a_{k+p-1} - a_1a_2\ldots a_{k-1}}{\underbrace{99\ldots9}_{p \text{ ori}}\underbrace{00\ldots0}_{(k-1) \text{ ori}}}.$$

Formulele 1° şi 2° dau reguli după care se găseşte numărul raţional care se reprezintă sub forma unei fracţii zecimale periodice date.

Exemple: 1) $0,(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0,(45) = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$;

$$2)\ 0,45(3) = \frac{453 - 45}{900} = \frac{408}{900} = \frac{34}{75};$$

$$3)\ 0,027(45) = \frac{2745 - 27}{99\ 000} = \frac{2\ 718}{99\ 000} = \frac{151}{5\ 500}.$$

Observaţie. Am definit fracţiile zecimale periodice fără a face presupunerea că au sau nu perioada (9). Dacă considerăm o fracţie zecimală cu perioada (9), aplicînd în mod formal regulile 1° şi 2° de mai sus, se obţine un număr raţional. Fie, de exemplu, fracţia zecimală periodică 0,(9). După regula 1°, acestei fracţii zecimale îi corespunde numărul raţional

$$0,(9) = \frac{9}{9} = 1.$$

Pe de altă parte numărului 1 îi corespunde prin algoritmul împărţirii fracţia lui zecimală 1,000... = 1,(0).

Să considerăm un alt exemplu şi anume fracţia zecimală periodică 0,4(9) cu perioada (9). După regula 2°, acestei fracţii îi corespunde numărul raţional:

$$0,4(9) = \frac{49 - 4}{90} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte numărului raţional $\frac{1}{2}$ îi corespunde prin algoritmul împărţirii fracţia zecimală 0,5000 ... = 0,5(0).

Din cele două exemple rezultă că teorema precedentă (în ultima sa parte) nu mai este adevărată pentru fracţiile zecimale infinite cu perioada (9). Mai precis, dacă este dată o fracţie zecimală infinită cu perioada (9), acesteia îi corespunde după regula 1° sau regula 2° un număr raţional $\frac{m}{n}$. Însă acestui număr raţional $\frac{m}{n}$, prin algoritmul împărţirii, nu-i mai corespunde fracţia zecimală dată, ci o fracţie care se obţine din aceasta prin mărirea cu o unitate a numărului din faţa primei perioade şi înlăturarea cifrelor următoare. Se poate vedea uşor că această regulă se referă la toate fracţiile zecimale periodice cu perioada (9).

De aceea, ori de cîte ori întîlnim în calcule o fracţie zecimală cu perioada (9) convenim să o înlocuim cu fracţia zecimală cu perioada (0) (finită) obţinută după regula enunţată mai înainte. De exemplu:

$$0,4(9) = 0,5(0); \qquad 0,1(9) = 0,2(0).$$

În concluzie, numerele raționale (și numai ele) se reprezintă sub formă de fracții zecimale infinite periodice. Dar există fracții zecimale care nu sînt periodice? Răspunsul la această întrebare este afirmativ. De exemplu, fracția

$$0{,}101001000100001000001\ldots$$

(după primul 1 este un 0, după al doilea sînt doi de 0 etc.) este o fracție zecimală infinită neperiodică.

Într-adevăr, să presupunem că această fracție este periodică, și fie p numărul cifrelor din perioadă. Perioada trebuie să conțină și o unitate. De aceea între orice două unități consecutive (de după virgulă) nu pot fi mai mult de $p - 1$ zerouri; contradicție. Contradicția obținută arată că fracția este neperiodică.

În paragraful următor se vor indica probleme concrete care conduc la fracții zecimale infinite neperiodice.

§2. NUMERELE REALE CA FRACȚII ZECIMALE INFINITE

În clasele anterioare a fost prezentată necesitatea lărgirii mulțimii $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, obținîndu-se astfel mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale.

Iată două probleme concrete care conduc la aceasta.

1) Nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2.

Într-adevăr, să presupunem, prin absurd că există un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Putem presupune că fracția $\frac{m}{n}$ este ireductibilă, adică m și n sînt numere întregi prime între ele. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ rezultă $m^2 = 2n^2$. Cum $2n^2$ este număr par, atunci și m^2 este par și deci m este par. Fie $m = 2k$, k un număr întreg. Înlocuind pe $m = 2k$ în relația precedentă, rezultă $4k^2 = 2n^2$, de unde $2k^2 = n^2$, adică n este par. Deci m și n sînt numere întregi pare, ceea ce contrazice ireductibilitatea fracției $\frac{m}{n}$. Prin urmare presupunerea noastră că $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ este falsă. Acest fapt arată că ecuația cu coeficienți întregi $x^2 - 2 = 0$ nu are, ca soluții, numere raționale.

2) Fie acum un triunghi dreptunghic isoscel ABC (fig. III.1).

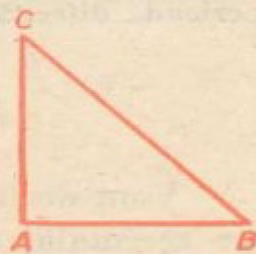


Fig. III.1

Alegînd cateta $[AB]$ ca unitate de măsură (adică de lungime 1), vom arăta că nu există un număr rațional $\frac{m}{n}$ care să reprezinte lungimea lui BC adică a n-a parte din AB să se cuprindă de m ori în BC. Într-adevăr, dacă lungimea lui $[BC]$ s-ar exprima prin numărul

rațional $\frac{m}{n}$, atunci conform teoremei lui Pitagora rezultă $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Dar am arătat la pct. 1) că o astfel de relație nu poate avea loc.

Dacă $BC = a$, rezultă că a este o rădăcină a ecuației $x^2 - 2 = 0$. Notăm $a = \sqrt{2}$, care reprezintă lungimea ipotenuzei. Am văzut că $\sqrt{2}$ nu este un număr rațional, deci el va fi un număr de o natură nouă. Un astfel de număr, care nu este rațional îl numim *irațional*. În același mod numerele $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ș.a. care sînt rădăcini ale ecuațiilor: $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 5 = 0$ ș.a. sînt numere iraționale. (Există și numere iraționale care nu sînt rădăcini ale unor ecuații, de exemplu numărul π care este egal cu raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său.) Mulțimea numerelor raționale împreună cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea **R** *a numerelor reale.*

În clasele anterioare, a fost indicat un algoritm de construcție a fracției zecimale sub care se reprezintă $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots .$$

Deoarece $\sqrt{2}$ este număr irațional rezultă că fracția zecimală care-l reprezintă este o fracție zecimală infinită neperiodică. (Și numărul π are o reprezentare ca fracție zecimală infinită neperiodică.)

Acceptăm că fiecare fracție zecimală neperiodică infinită reprezintă un număr real, mai precis un număr irațional.

În acest mod orice număr real a se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită (periodică sau neperiodică) $a_0, a_1a_2a_3\ldots$.

Funcția

$$a \to a_0, a_1a_2a_3\ldots ,$$

de la mulțimea numerelor reale la mulțimea fracțiilor zecimale infinite, care nu au perioada (9), este bijectivă, adică fiecărui număr real i se asociază o fracție zecimală, care nu are perioada (9), bine determinată, și fiecare astfel de fracție zecimală reprezintă un număr real bine determinat.

Teoria riguroasă a numerelor reale ca fracții zecimale infinite depășește programa clasei a IX-a. Introducerea fracțiilor zecimale infinite ne permite să pătrundem mai mult în natura acestor noi numere (iraționale).

Observație. Pentru simplitate, pe baza bijecției precedente, vom identifica în continuare numărul real cu fracția zecimală prin care se reprezintă, adică

$$a = a_0, a_1a_2a_3\ldots .$$

În particular, numerele raționale se identifică cu fracțiile zecimale periodice (de perioadă diferită de (9)) prin care se reprezintă.

§3. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Vom defini ordinea pe mulțimea numerelor reale, folosind reprezentarea lor zecimală, astfel încît aceasta să coincidă pentru numerele raționale cu cea deja introdusă pentru aceste numere în clasele anterioare.

Fie $a = a_0, a_1a_2a_3...$ şi $b = b_0, b_1b_2b_3...$ două numere reale, unde fracţiile $a_0, a_1a_2a_3...$ şi $b_0, b_1b_2b_3...$ nu au perioada (9).

Spunem că cele două numere sînt *egale* dacă oricare ar fi $i = 0,1,2,...$ avem $a_i = b_i$.

Definiţie. **Spunem că numărul real $a = a_0, a_1a_2a_3...$ este *mai mic* decît numărul real $b = b_0, b_1b_2b_3...$ şi scriem**

$$a < b$$

dacă există un număr natural $k \geqslant 0$, astfel încît $a_k < b_k$ şi $a_i = b_i$ pentru orice $i < k$.

În acest caz se mai spune că b este *mai mare* decît a şi se scrie $b > a$.

Exemple. 1) $3,9014... < 4,1735...$, deoarece $a_0 = 3 < 4 = b_0$.

2) $3,45170... < 3,45181...$, deoarece $a_0 = b_0 = 3$, $a_1 = b_1 = 4$, $a_2 = b_2 = 5$, $a_3 = b_3 = 1$, $a_4 < b_4$ $(7 < 8)$.

3) $\overline{20},432... < 1,720...$, deoarece $a_0 = -20 < 1 = b_0$.

4) $3,173... > 3,165...$, deoarece $a_0 = b_0 = 3$, $a_1 = b_1 = 1$ şi $a_2 > b_2$ $(7 > 6)$.

5) $\overline{4},232... > \overline{4},193...$, deoarece $a_0 = b_0 = -4$, $a_1 > b_1$ $(2 > 1)$.

Dacă $a < 0$ se spune că numărul real a este *negativ*, iar dacă $a > 0$ atunci a se numeşte *pozitiv*. Este clar că un număr real $a = a_0, a_1a_2a_3...$ este negativ dacă şi numai dacă partea sa întreagă a_0 este număr negativ.

De exemplu,

$$\overline{1},372... < 0,000... = 0, \text{ deoarece } a_0 = -1 < 0.$$

Observaţie. Pentru numerele raţionale, definiţia inegalităţilor dată mai înainte este tocmai cea pe care o cunoaştem din clasele anterioare. Astfel:

$$0,5000... < 0,51000..., \text{ dacă şi numai dacă } \frac{1}{2} < \frac{51}{100},$$

$$0,3000... < 0,334000... \text{ dacă şi numai dacă } \frac{1}{3} < \frac{334}{900}.$$

Este adevărată următoarea proprietate numită legea de *tricotomie*:

Dacă a şi b sînt două numere reale, atunci este adevărată una şi numai una din relaţiile:

$$a > b, \ a = b, \ a < b.$$

Definiţie. **Se spune că numărul real a este *mai mic sau egal* cu numărul real b, şi scriem $a \leqslant b$ dacă $a < b$ sau $a = b$.**

Relaţia „$\leqslant$“ are următoarele proprietăţi:

1) $a \leqslant a$, oricare ar fi a din $\mathbf{R}$ *(reflexivitatea)*,

2) dacă $a \leqslant b$ şi $b \leqslant a$ atunci $a = b$ *(antisimetria)*,

3) dacă $a \leqslant b$ şi $b \leqslant c$ atunci $a \leqslant c$ *(tranzitivitatea)*.

Această relaţie se numeşte *relaţia de ordine* pe mulţimea numerelor reale.

Observăm că proprietatea de tranzitivitate o posedă și relația „$<$", adică dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.

Revenim cu alte proprietăți ale inegalităților în § 5.

§4. APROXIMĂRI ZECIMALE ALE NUMERELOR REALE

În practică, aproape niciodată nu se cunosc valorile exacte ale mărimilor. Orice instrument sau aparat nu arată cu exactitate absolută mărimile. Orice termometru indică temperatura cu o oarecare eroare, nici un ampermetru nu poate indica intensitatea exactă a curentului etc. O anumită eroare se face chiar la citirea rezultatelor măsurătorilor pe aparate. De aceea în loc să operăm cu valorile exacte ale mărimilor, sîntem obligați să operăm cu valorile lor aproximative. În general, o mărime se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită, dar un aparat nu poate indica, practic, decît un număr finit dintre zecimale, adică o valoare aproximativă a mărimii.

Fie a un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită. *Aproximările (valorile aproximative) zecimale prin lipsă* ale numărului a se definesc ca fiind numerele care se obțin prin înlăturarea succesivă a tuturor cifrelor sale care stau după virgulă, începînd cu prima cifră, apoi cu cea de-a doua, după aceea cu cea de-a treia ș.a.m.d.

De exemplu, pentru numărul $a = 2,173256...$, aproximările zecimale prin lipsă vor fi:

$$2;\ 2,1;\ 2,17;\ 2,173;\ 2,1732;\ 2,17325;...$$

Dacă la ultimul număr de după virgulă al fiecărei aproximări zecimale prin lipsă a numărului a se adaugă 1, atunci se obțin *aproximările (valorile aproximative) zecimale prin adaos* ale numărului a. De exemplu, pentru numărul 2,173256..., astfel de aproximări zecimale vor fi:

$$3;\ 2,2;\ 2,18;\ 2,174;\ 2,1733;\ 2,17326;... .$$

Avînd în vedere relația de ordine pe mulțimea numerelor reale, introdusă în § 3, primele cinci aproximări zecimale ale lui a se pot ilustra în următorul tabel:

$$2 \leqslant a < 3$$
$$2,1 \leqslant a < 2,2$$
$$2,17 \leqslant a < 2,18$$
$$2,173 \leqslant a < 2,174$$
$$2,1732 \leqslant a < 2,1733.$$

Cum numărul $a = 2,173256...$ este cuprins între:

1) 2 și 3 și $3 - 2 = 1$;

2) 2,1 și 2,2 și $2,2 - 2,1 = 0,1$;

3) 2,17 și 2,18 și $2,18 - 2,17 = 0,01$ ș.a.m.d.

aceste aproximări zecimale sînt, respectiv, cu o eroare mai mică decît 1; $0,1 = 10^{-1}$; $0,01 = 10^{-2}$ ș.a.m.d.

În general, pentru numărul $a = a_0, a_1a_2a_3...a_n...$ *aproximările zecimale cu o eroare mai mică decît 10^{-n}*, sînt:

i) *prin lipsă*: $a'_n = a_0,a_1a_2a_3...a_n$,

ii) *prin adaos*: $a''_n = a_0,a_1a_2a_3...a_n + 10^{-n}$.

Observații. 1) Dacă numărul a este reprezentat de o fracție periodică cu perioada (0), atunci începînd cu un anumit rang, aproximările zecimale prin lipsă ale sale sînt egale cu numărul însuși. De exemplu, pentru numărul $1{,}52 = 1{,}52000...$, avem:

$$1;\ 1{,}5;\ 1{,}52;\ 1{,}520;\ 1{,}5200;\ ...\ .$$

De aceea, pentru a cuprinde toate cazurile, în tabelul cu aproximațiile zecimale ale unui număr real, inegalitatea din stînga o scriem „$\leqslant$".

2) Scrierea valorilor aproximative a'_n și a''_n o vom face sub formă de fracție zecimală finită, fără a mai adăuga la dreapta o infinitate de zerouri.

După definiție (vezi i) și ii)), precum și observația precedentă, pct. 1) rezultă că numărul a este mai mare sau egal cu orice aproximare zecimală prin lipsă a sa și mai mic decît orice aproximare zecimală prin adaos a sa.

Așadar, unui număr real a i se asociază aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $a'_0, a'_1, a'_2, a'_3, ...$

prin adaos: $a''_0, a''_1, a''_2, a''_3, ...$

astfel încît

$a'_0 \leqslant a < a''_0$ (cu o eroare mai mică decît 1)

$a'_1 \leqslant a < a''_1$ (cu o eroare mai mică decît 0,1)

$a'_2 \leqslant a < a''_2$ (cu o eroare mai mică decît 0,01)

. . . .

. . . .

Observație. Este foarte important de semnalat pentru cele ce urmează că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real a, sînt întotdeauna numere raționale.

§5. ADUNAREA ȘI ÎNMULȚIREA NUMERELOR REALE

5.1. Vom defini adunarea și înmulțirea numerelor reale, folosind reprezentarea lor zecimală, astfel încît aceste operații să coincidă pentru numerele raționale cu adunarea și înmulțirea deja introduse în clasele anterioare.

Fie date două numere reale a și b și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și adaos cu o eroare mai mică decît 10^{-n}. Atunci pentru orice n, avem:

$$a'_n \leqslant a < a''_n,$$

$$b'_n \leqslant b < b''_n.$$

După cum am observat la sfîrșitul paragrafului precedent, numerele a'_n, a''_n, b'_n, b''_n sînt raționale și deci, de la adunarea numerelor raționale, au sens sumele $a'_n + b'_n$ și $a''_n + b''_n$, pentru orice n.

Definiție. **Se numește** *suma numerelor reale* a **și** b **un număr real** c**, care pentru orice număr natural** n**, satisface inegalitățile:**

$$a'_n + b'_n \leqslant c < a''_n + b''_n.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real c există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a IX-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a.

În exemplele de mai jos vom arăta cum această definiție a sumei ne permite să găsim valoarea aproximativă a ei, cu o eroare oricît de mică dorim.

Exemple. 1) Să găsim primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \sqrt{2}$ și $b = \sqrt{5}$.

Avem:

$$\begin{array}{rcl}
1 \leqslant \sqrt{2} < 2 & \qquad & 2 \leqslant \sqrt{5} < 3 \\
1{,}4 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}5 & & 2{,}2 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}3 \\
1{,}41 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}42 & & 2{,}23 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}24 \\
1{,}414 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}415 & & 2{,}236 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}237 \\
1{,}4142 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}4143 & & 2{,}2360 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}2361 \\
1{,}41421 \leqslant \sqrt{2} < 1{,}41422 & & 2{,}23606 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}23607
\end{array}$$

Deci $a'_5 + b'_5 = 3{,}65027 \leqslant \sqrt{2} + \sqrt{5} < a''_5 + b''_5 = 3{,}65029$ de unde

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3{,}6502\ldots.$$

2) Să găsim primele patru cifre după virgulă pentru suma numerelor $a = \overline{3}{,}12714\ldots$ și $b = 2{,}42731\ldots$ (celelalte cifre după virgulă care ar urma după cele scrise nu au importanță, pentru problema pusă).

Avem $a'_5 + b'_5 = \overline{1}{,}55445 \leqslant a + b < a''_5 + b''_5 = \overline{1}{,}55447$. Astfel, putem scrie patru cifre după virgulă pentru suma

$$a + b = \overline{1}{,}5544\ldots = -0{,}4456\ldots.$$

3) Fie numerele $a = 2{,}23751\ldots$ și $b = 3{,}76248\ldots$. Atunci $a'_5 + b'_5 = 5{,}99999$, iar $a''_5 + b''_5 = 6{,}00001$. Deci, $6{,}00000$ este o valoare aproximativă a sumei $a + b$, cu o eroare mai mică decît 10^{-5}.

Analog, se definește produsul numerelor reale nenegative.

Observăm mai întîi, ca și pentru sumă, că deoarece a'_n, a''_n, b'_n, b''_n sînt numere raționale, produsele $a'_n b'_n$ și $a''_n b''_n$ au sens și sînt produse de numere raționale.

Definiție. **Se numește** *produsul numerelor reale nenegative* a **și** b**, un număr real** d**, care pentru orice număr natural** n**, satisface inegalitățile:**

$$a'_n b'_n \leqslant d < a''_n b''_n.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real d există și este unic.

Dacă unul sau ambele numere sînt negative, atunci se înmulțesc valorile lor absolute și apoi se ține seamă de cunoscuta regulă a semnelor și anume:

1° produsul este pozitiv dacă ambii factori au acelaşi semn şi atunci:

$$ab = |a| |b|;$$

2° produsul este negativ dacă semnele factorilor sînt diferite şi atunci:

$$ab = -|a| |b|.$$

Exemple. 1) Să se calculeze pătratul numărului

$$a = 1,4142\ldots.$$

Avem $a'_4 = 1,4142$ şi $a''_4 = 1,4143$. Atunci:

$$a'^2_4 = 1,99996164 \leqslant a^2 < a''^2_4 = 2,00024449.$$

Se observă că pătratul numărului a este foarte aproape de numărul 2.

2) Să se găsească trei cifre după virgulă pentru produsul numerelor $a = \frac{1}{3}$ şi $b = \sqrt{2}$.

Avem $a = 0,33333\ldots$ şi $\sqrt{2} = 1,41421\ldots$ Atunci

$$\begin{array}{rcl} 0 \leqslant a < 1 & \qquad & 1 \leqslant b < 2 \\ 0,3 \leqslant a < 0,4 & & 1,4 \leqslant b < 1,5 \\ 0,33 \leqslant a < 0,34 & & 1,41 \leqslant b < 1,42 \\ 0,333 \leqslant a < 0,334 & & 1,414 \leqslant b < 1,415 \\ 0,3333 \leqslant a < 0,3334 & & 1,4142 \leqslant b < 1,4143. \end{array}$$

Deci

$$\begin{array}{c} 0 \leqslant ab < 2 \\ 0,42 \leqslant ab < 0,6 \\ 0,4653 \leqslant ab < 0,4828 \\ 0,47062 \leqslant ab < 0,47261 \\ 0,47135286 \leqslant ab < 0,47152762. \end{array}$$

Astfel am obţinut:

$$ab = 0,471\ldots.$$

5.2. Proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor reale. Proprietăţile inegalităţilor

Menţionăm în continuare proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor reale, precum şi unele proprietăţi ale inegalităţilor. Pe baza definiţiilor operaţiilor de adunare şi înmulţire date mai înainte şi folosind proprietăţile corespunzătoare ale adunării şi înmulţirii numerelor raţionale, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea lor.

Adunarea pe mulţimea **R** *a numerelor reale are proprietăţile*:

1° este *comutativă*, adică oricare ar fi a şi b din **R**, avem

$$a + b = b + a.$$

2° este *asociativă*, adică oricare ar fi a, b şi c din **R**, avem

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3° numărul 0 este *element neutru* pentru adunare, adică oricare ar fi a din $\mathbf{R}$, avem

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

4° orice număr real a are un *opus*, care este $-a$, adică

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Ca de obicei, în loc de $a + (-b)$ vom scrie $a - b$.

Înmulțirea numerelor reale are proprietățile:

1. este *comutativă*, adică oricare ar fi a și b din $\mathbf{R}$, avem

$$ab = ba;$$

2. este *asociativă*, adică oricare ar fi a, b și c din $\mathbf{R}$, avem

$$(ab)c = a(bc);$$

3. numărul 1 este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi a din $\mathbf{R}$, avem

$$a1 = 1a = a;$$

4. orice număr real a diferit de zero are un *invers*, adică există un număr real, notat cu a^{-1}, astfel încît

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1;$$

5. este *distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi a, b, c din $\mathbf{R}$ au loc egalitățile:

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Ca de obicei, în loc de $ab^{-1}(b \neq 0)$, vom scrie $a : b$ sau $\frac{a}{b}$.

Am dat în § 3 unele proprietăți ale inegalităților pe mulțimea numerelor reale. Dăm mai jos și alte proprietăți ale lor legate de operațiile de adunare și înmulțire. Astfel:

1° dacă $a < b$, iar c este un număr real oarecare, atunci

$$a + c < b + c,$$

2° dacă $a < b$ și $c > 0$, atunci $ac < bc$,

3° dacă $a < b$ și $c < 0$, atunci $ac > bc$.

De aici rezultă ușor că:

4° dacă $a < b$ și $c < d$ atunci $a + c < b + d$ și $a - d < b - c$,

5° dacă a, b, c, d sînt numere reale pozitive astfel încît $a < b$ și $c < d$, atunci $ac < bd$. În aceleași condiții, avem și $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.

Aceleași proprietăți (1°, 2°, 3°, 4°, 5°) sînt valabile și pentru relația „$\leqslant$".

Observație. În general, cînd se lucrează cu numere reale nu se recurge neapărat la reprezentarea lor zecimală. Rezultatul unei probleme poate fi dat sub forma: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $a^2(2 + \sqrt{5})$, $\frac{1}{3}\sqrt{7}$, $\frac{\pi^2}{5}$.

§6. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR REALE

Fie d o dreaptă oarecare pe care fixăm un punct O numit origine (fig. III.2) şi sensul pozitiv de la stînga la dreapta. Originea împarte dreapta d în două semidrepte $(Ox$ şi $(Ox'$; Ox este *semiaxa pozitivă*, iar Ox' *semiaxa negativă*. Dacă fixăm o unitate de măsură, atunci distanţa AB dintre orice două puncte A şi B ale dreptei d se exprimă printr-un număr nenegativ

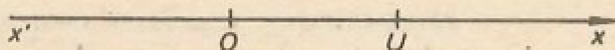


Fig. III.2

Să alegem ca unitate de măsură lungimea segmentului $[OU]$; atunci $OU = 1$.

Dacă M este un punct al semiaxei pozitive Ox, să notăm cu $x_M = OM$, abscisa sa. În acest mod se defineşte o funcţie

$$M \to x_M$$

de la punctele semidreptei $(Ox$ la mulţimea numerelor reale pozitive.

În cursul de Geometrie se afirmă că: pentru orice număr real pozitiv (lungime) x, există un punct bine determinat M pe semiaxa Ox, care să se găsească la distanţa x de punctul O, adică $x_M = x$. Aceasta ne spune că funcţia definită mai înainte este bijectivă.

Dacă punctul M aparţine semiaxei negative Ox', abscisa sa este numărul $x_M = - OM$. Convenim ca $x_O = 0$ (zero).

Atunci funcţia

$$M \to x_M$$

definită pe toată dreapta d cu valori în mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale stabileşte o bijecţie între aceste două mulţimi. De aceea mulţimea numerelor reale se numeşte adesea *dreapta numerică* sau *dreapta reală*, sau *axa reală*, iar elementele (numerele) sale se numesc *punctele dreptei numerice*. Bijecţia stabilită permite să folosim, adesea, pentru numere, terminologia geometrică.

Există procedee simple de construcţie cu rigla şi compasul a unor puncte pe axa $x'x$ care corespund unor anumite numere reale (cum ar fi: numerele raţionale, precum şi unele numere iraţionale ca: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ ş.a.).

În acest sens vom prezenta următorul exemplu:

Exemplu. Să se construiască pe dreapta d, cu ajutorul riglei şi compasului, numărul $\sqrt{2}$ (fig. III.3).

Se construieşte pătratul de latură $[OU]$: $OU = 1$. Conform teoremei lui Pitagora, $OA^2 = OU^2 + AU^2 = 1 + 1 = 2$. Deci $OA = \sqrt{2}$. Cu ajutorul compasului se construieşte $OM = OA = \sqrt{2}$.

Pe semiaxa Ox am reprezentat şi aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos cu o eroare mai mică decît 1; 0,1 respectiv 0,01 ale lui $\sqrt{2}$.

Să vedem sensul intuitiv al teoremei amintite mai înainte, cu ajutorul reprezentării sub formă de fracţie zecimală a numerelor reale. De la reprezentarea numerelor raţionale pe dreaptă, ştim să construim un punct M a cărui abscisă este un număr care se reprezintă sub formă de fracţie zecimală finită.

Fie

$$a = a_0, a_1a_2a_3\ldots$$

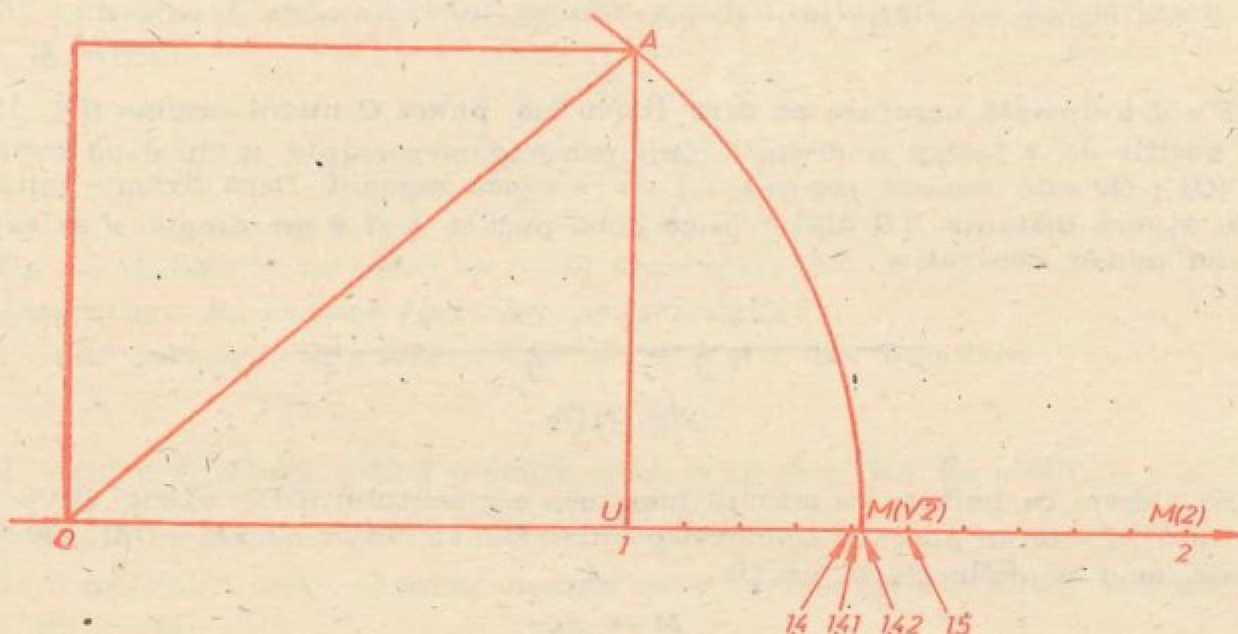


Fig. III.3

un număr real oarecare şi

$$a'_0,\ a'_1,\ a'_2,\ \ldots$$
$$a''_0,\ a''_1,\ a''_2,\ \ldots$$

aproximările zecimale prin lipsă şi prin adaos ale lui a. Să considerăm segmentul $\Delta_n = [M(a'_n),\ M(a''_n)]$ cu capetele a'_n şi a''_n şi de lungime 10^{-n}. Avem

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \ldots.$$

Se arată că există un singur punct care să aparţină tuturor segmentelor Δ_n, pentru orice n. Acesta este punctul $M(a)$.

De exemplu, fie $a = 1{,}671\ldots$.
Atunci

$$1 \leqslant a < 2$$
$$1{,}6 \leqslant a < 1{,}7$$
$$1{,}67 \leqslant a < 1{,}68.$$

Interpretarea geometrică este dată în figura III.4.

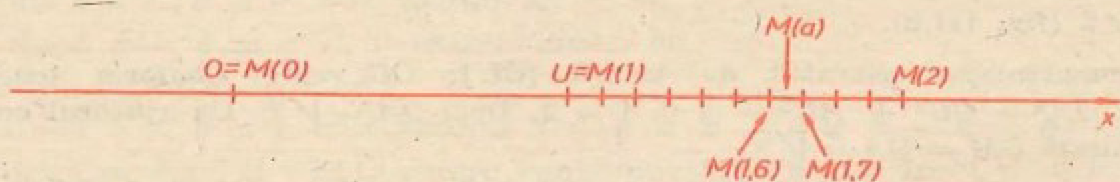


Fig. III.4

EXERCIŢII

1. Să se scrie sub formă de fracţie zecimală infinită, numerele:

a) 3; b) $\frac{15}{8}$; c) $\frac{1}{4}$; d) 0; e) $-\frac{1}{4}$; ; f) $-\frac{2}{3}$; g) $-\frac{29}{11}$; h) $-\frac{123}{17}$.

2. Pentru fracţiile zecimale periodice următoare, să se găsească numărul raţional pe care-l reprezintă şi să se verifice apoi prin algoritmul de împărţire că se obţine fracţia zecimală iniţială:

a) 1,33(4); b) 0,(7); c) $-0,(14)$; d) 2,073(83); e) $-0,01(023)$; f) $-2,001(7)$.

3. Să se arate care dintre numerele de mai jos sînt raţionale:
$-1,3$; 3,75; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; 0,343443444344443444444... (după primul 3 urmează un 4; după al doilea 3 urmează doi de 4 ş.a.m.d.); 0,12345678910111213... (după virgulă se scriu în ordine toate numerele naturale).

4. Să se indice cîteva numere naturale n astfel încît

a) $\sqrt{n}$ este raţional; b) $\sqrt{n}$ nu este raţional.

5. Să se arate că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încît:

a) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 2$; b) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 3$; c) $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 6$.

6. Să se spună care numere din perechile de numere următoare este mai mare şi care este mai mic:

a) 3,43479... şi 3,43497...; b) 15,25... şi $\frac{61}{4}$; c) $\frac{5}{9}$ şi 0,(5); d) $-\frac{3}{8}$ şi $-0,375...$;

e) $-5,4833...$ şi $-5,5829...$; f) 0,(6) şi $\frac{2}{3}$; g) 0 şi $-0,00011$; h) $-1,1$ şi $-1,1(01)$.

7. i) Să se găsească aproximările zecimale cu o eroare mai mică decît 0,1, prin lipsă şi adaos, pentru numerele;

a) $\sqrt{5}$; b) $-\sqrt{5}$; c) $\frac{11}{7}$; d) $-\frac{11}{7}$; e) $\sqrt{7}$; f) $-\sqrt{7}$; g) $\frac{178}{13}$; h) $\sqrt{11}$;

ii) Să se găsească apoi pentru aceleaşi numere primele trei aproximări zecimale prin lipsă şi adaos.

8. Fie $x = 2,7154...$ şi $y = 1,4287...$. Să se găsească primele trei cifre după virgulă ale sumei $x + y$.

9. Fie $x = 2,1468...$ şi $y = 1,5431...$. Să se găsească primele două cifre după virgulă ale produsului lui x cu y.

10. Să se găsească primele patru cifre după virgulă ale sumelor:

a) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$; b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; c) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$; d) $\sqrt{3} + (-\sqrt{7})$; e) $(-\sqrt{3}) + \sqrt{7}$.

11. Să se găsească primele trei cifre după virgulă ale produselor:

a) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7}$; b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$; c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$; d) $\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{5})$; e) $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

12. a) Să se construiască cu rigla şi compasul segmentele de lungime: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, şi apoi să se figureze pe axă.

b) Să se figureze pe axa reală punctele care au abscisele:

$$-\sqrt{3};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{5};\ \sqrt{5};\ -\sqrt{6};\ \sqrt{6};\ -\sqrt{10};\ \sqrt{10}.$$

Indicaţie. Se foloseşte teorema lui Pitagora.

13. Să se arate că numerele $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ sînt iraţionale.

14. Fie a și b numere reale astfel încît $a + b$ și $a - b$ să fie numere raționale. Sînt numerele a, b și $a \cdot b$ raționale?

15. Fie a și b numere raționale. Să se demonstreze că dacă $a + b\sqrt{2} \neq 0$, atunci și $a - b\sqrt{2} \neq 0$.

16. Fie a un număr. Este posibil oare ca primele 10 puteri ale numărului a

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{10}$$

să fie iraționale, iar următoarele 10 puteri:

$$a^{11},\ a^{12},\ a^{13},\ \ldots,\ a^{20}$$

să fie raționale?

17. Dați exemple de ecuații de gradul al doilea cu coeficienți întregi ale căror rădăcini să fie iraționale.

18. Să se demonstreze că ecuația $x^3 - px + 1 = 0$, pentru $p \in \mathbf{N}$, $p > 2$, nu are rădăcini raționale.

Indicație. Dacă $\alpha = \frac{m}{n}$ este o rădăcină a ecuației, atunci se arată că m și n sînt $+1$ sau -1; deci α este egal cu 1 sau -1, dar aceste numere nu sînt, evident, rădăcini ale ecuației.

CAPITOLUL IV

FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

§1. DEFINIŢIA FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA. EXEMPLE

Definiţie. Fiind date numerele reale, a, b, c cu $a \neq 0$, funcţia

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

definită prin formula: $f(x) = ax^2 + bx + c$, **se numeşte** *funcţie de gradul al doilea cu coeficienţii* a, b, c.

Observaţii 1) Domeniul şi codomeniul funcţiei de gradul al doilea este mulţimea numerelor reale. Deci funcţia de gradul al doilea este o funcţie numerică.

2) Deoarece domeniul şi codomeniul funcţiei de gradul al doilea este $\mathbf{R}$ vom indica această funcţie astfel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ sau } y = ax^2 + bx + c.$$

3) O funcţie de gradul al doilea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este perfect determinată cînd se cunosc numerele reale a, b, c $(a \neq 0)$.

4) Trebuie să observăm că în definiţia funcţiei de gradul al doilea condiţia $a \neq 0$ este esenţială în sensul că ipoteza $a = 0$ conduce la funcţia de gradul întîi, studiată în clasa a VIII-a.

5) Denumirea de funcţie de gradul al doilea provine din faptul că este definită prin intermediul trinomului de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$.

Exemple de funcţii de gradul al doilea

1) $f_1(x) = 7x^2 - 9x + 10$, $(a = 7,\ b = -9,\ c = 10)$;
2) $f_2(x) = \sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}x + 1$, $(a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{2},\ c = 1)$;
3) $f_3(x) = 0{,}51x^2 - 2x$, $(a = 0{,}51,\ b = -2,\ c = 0)$;
4) $f_4(x) = x^2 + 0{,}31$, $(a = 1,\ b = 0,\ c = 0{,}31)$;
5) $f_5(x) = -x^2 - 5x - 0{,}31$, $(a = -1,\ b = -5,\ c = -0{,}31)$.

Probleme care conduc la funcţia de gradul al doilea

Există numeroase exemple concrete care au impus studiul sistematic al funcţiei de gradul al doilea:

1) Aria A a unui pătrat este funcţie de lungimea laturii sale x. Mai precis, această dependenţă funcţională este dată de relaţia:

$$A = x^2.$$

2) Aria A a unui cerc este funcție de lungimea razei sale x; această dependență funcțională se exprimă astfel:

$$A = \pi x^2,$$

unde π este o constantă aproximativ egală cu 3,14.

3) În fizică se arată că în căderea liberă a unui corp în vid, sub acțiunea forței gravitaționale, spațiul $s(t)$ parcurs de corp în timpul t este dat de formula:

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2,$$

unde g este o constantă aproximativ egală cu 9,8 m/s².

4) Dintr-un turn de înălțime h_0 se aruncă o piatră pe verticală în sus cu viteza inițială v_0. Înălțimea $h(t)$ la care ea ajunge la momentul t este dată de formula:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

5) În mișcarea uniform accelerată spațiul $s(t)$ parcurs de un mobil în timpul t este dat de formula:

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2,$$

unde a este accelerația mobilului.

§2. GRAFICUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

Ne propunem să construim graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Aceasta o facem cu scopul de a pune în evidență elementele principale ale graficului funcției de gradul al doilea și de a avea posibilitatea ca atunci cînd studiem funcția de gradul al doilea să interpretăm din punct de vedere geometric proprietățile obținute. Graficul funcției de gradul al doilea îl vom face în mai multe etape.

1. *Graficul funcției* $f(x) = x^2$

(Legea de asociere a acestei funcții se poate exprima foarte simplu și în cuvinte: „fiecărui număr real i se asociază pătratul său".)

Trasarea graficului $f(x) = x^2$ se face prin „puncte". Mai precis se asociază următorul tabel de valori funcției $f(x) = x^2$:

x	... -3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1/2	1	2	3 ...
$f(x) = x^2$	... 9	4	1	1/4	0	1/4	1	4	9 ...

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă ca în figura IV.1.

(Facem observația că punctele reprezentate nu se unesc cu segmente ca în fig. IV.2.)

Curba obținută se numește *parabolă*. Pentru a obține o construcție cît mai exactă a acestei parabole, trebuie să reprezentăm cît mai multe puncte

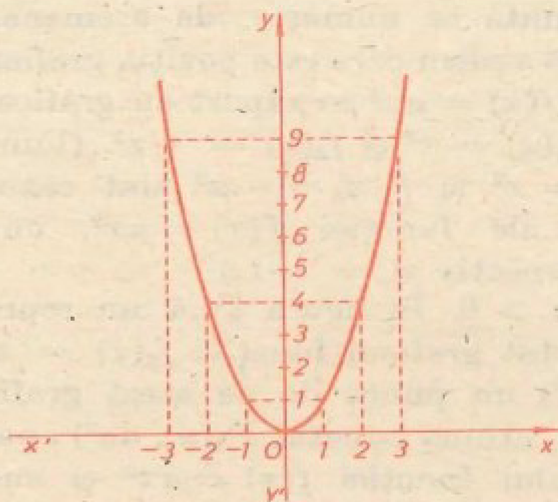


Fig. IV.1

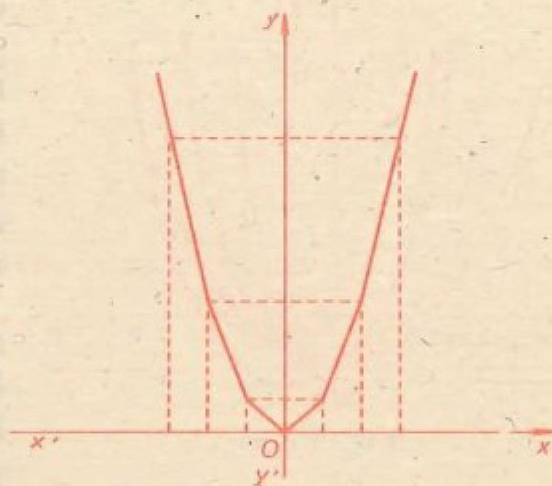


Fig. IV.2

ale graficului. Parabola funcţiei $f(x) = x^2$ are următoarele proprietăţi importante:

1° ea se găseşte deasupra axei $x'x$; trece prin originea axelor şi, punctul O are cea mai mică ordonată (egală cu zero) dintre toate punctele de pe parabolă. Punctul O se numeşte *vîrful parabolei*;

2° axa $y'y$ este axă de simetrie pentru parabolă. Într-adevăr, dacă $P(\alpha, \alpha^2)$ este un punct al graficului, cum $\alpha^2 = (-\alpha)^2$, atunci şi $P'(-\alpha, \alpha^2)$ aparţine graficului. Dar punctele P şi P' sînt simetrice faţă de $y'y$.

1'. *Graficul funcţiei* $f(x) = -x^2$

(Legea de asociere a funcţiei f se poate exprima şi în cuvinte: „fiecărui număr real i se asociază opusul pătratului său".)

În figura IV.3 am reprezentat punctat graficul funcţiei $f_1(x) = x^2$. Graficul funcţiei $f(x) = -x^2$ se poate obţine prin simetria faţă de axa $x'x$, a graficului funcţiei $f_1(x) = x^2$.

Într-adevăr dacă $P(\alpha, \alpha^2)$ este un punct al graficului funcţiei $f_1(x) = x^2$, atunci simetricul său faţă de axa $x'x$ este punctul $P'(\alpha, -\alpha^2)$. Cum $f(\alpha) = -\alpha^2$, atunci P' se găseşte pe graficul funcţiei $f(x) = -x^2$.

Graficul funcţiei $f(x) = -x^2$ se numeşte, de asemenea, *parabolă*. Ea se găseşte sub axa $x'x$. Axa $y'y$ este axă de simetrie, iar O are cea mai mare ordonată dintre toate punctele graficului $f(x) = -x^2$. Punctul O se numeşte, de asemenea, *vîrful* parabolei funcţiei $f(x) = -x^2$.

În practică construcţia graficului funcţiei $f(x) = -x^2$ se face tot prin „puncte", ca la funcţia $f_1(x) = x^2$.

2. *Graficul funcţiei* $f(x) = ax^2$ $(a \neq 0)$

Graficul acestei funcţii se construieşte ca şi în cazul funcţiei $f_1(x) = x^2$ tot prin „puncte".

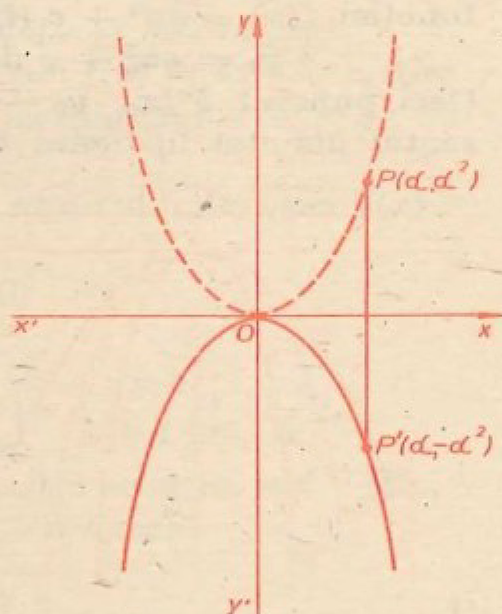


Fig. IV.3

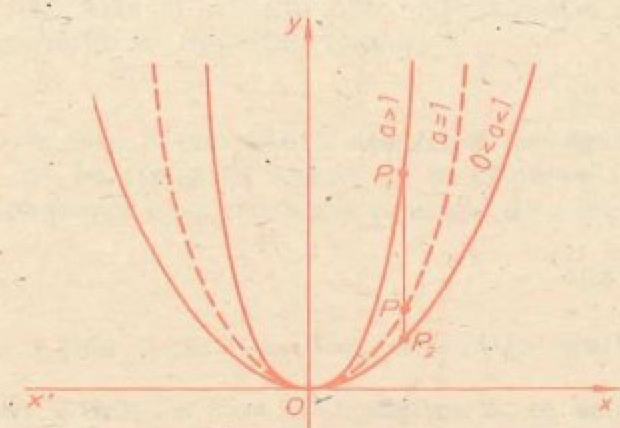


Fig. IV.4

Curba obținută se numește, de asemenea, parabolă. Să vedem care este poziția graficului funcției $f(x) = ax^2$ în raport cu graficele funcțiilor $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = -x^2$. (Funcțiile $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = -x^2$ sînt cazuri particulare ale funcției $f(x) = ax^2$, cînd $a = 1$ și respectiv $a = -1$.)

Cazul $a > 0$. În figura IV.4 am reprezentat punctat graficul funcției $f_1(x) = x^2$. Fie $P(\alpha, \alpha^2)$ un punct de pe acest grafic. Dacă $a > 1$, atunci punctul $P_1(\alpha, a\alpha^2)$ aparține graficului funcției $f(x) = ax^2$ și cum $a\alpha^2 > \alpha^2$, atunci ramurile parabolei funcției $f(x) = ax^2$ se găsesc între ramurile parabolei $f_1(x) = x^2$.

Dacă $0 < a < 1$ atunci punctul $P_2(\alpha, a\alpha^2)$ aparține graficului funcției $f(x) = ax^2$ și cum $\alpha^2 > a\alpha^2$, atunci ramurile parabolei funcției $f(x) = ax^2$ se găsesc sub ramurile parabolei $f_1(x) = x^2$.

Cu cît a este mai mare ramurile parabolei $f(x) = ax^2$ se depărtează mai lent de axa $y'y$ care este axă de simetrie. Originea O are cea mai mică ordonată dintre toate punctele graficului funcției $f(x) = ax^2$. Acest punct se va numi, de asemenea, *vîrful* parabolei acestei funcții.

Cazul $a < 0$. Graficul funcției $f(x) = ax^2$ este simetricul față de axa $x'x$ al graficului funcției $f'(x) = -ax^2$, unde $-a > 0$. Diversele poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2$ se obțin din cazul precedent (fig. IV.5). Axa $y'y$ rămîne axă de simetrie, iar punctul O care are cea mai mare ordonată dintre toate punctele graficului funcției $f(x) = ax^2$ se va numi *vîrful* graficului.

3. *Graficul funcției* $f(x) = ax^2 + c (a \neq 0)$

Vom considera funcția $g(x) = ax^2$. Fie $P(x_0, y_0)$ un punct al graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$ (fig. IV. 6). Atunci

$$y_0 = ax_0^2 + c \text{ de unde } y_0 - c = ax_0^2 \text{ sau } y_0 - c = g(x_0).$$

Deci punctul $P'(x_0, y_0 - c)$ aparține graficului funcției $g(x) = ax^2$, reprezentat punctat în figura IV.6.

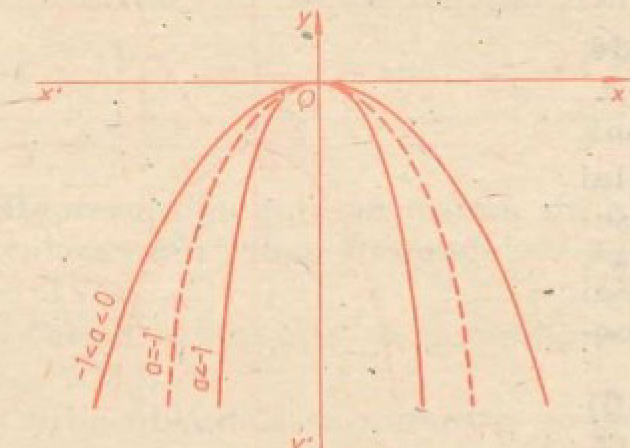


Fig. IV.5

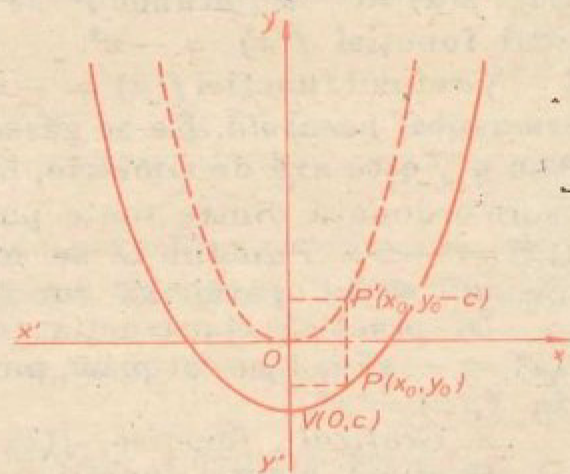


Fig. IV.6

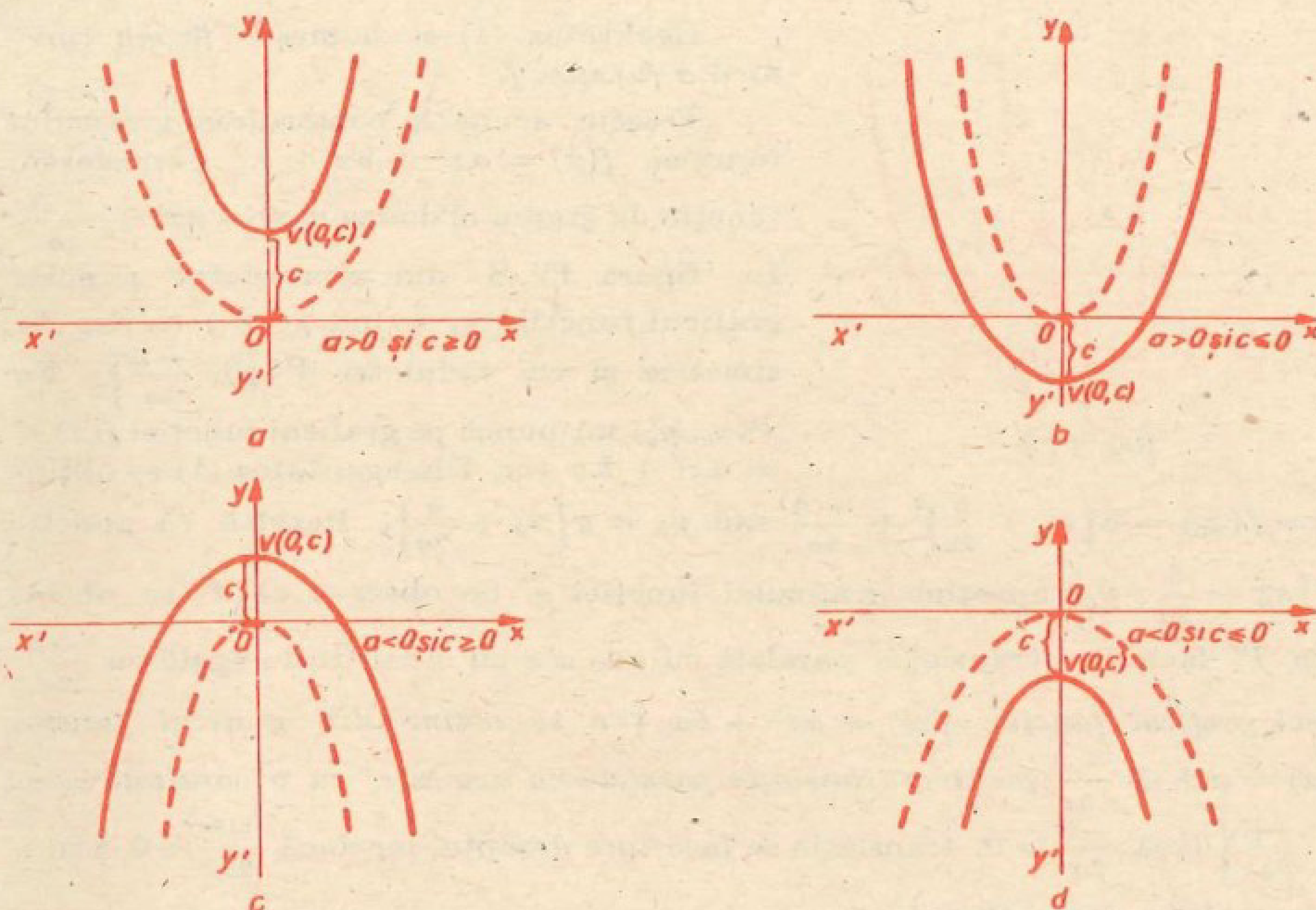


Fig. IV.7

Rezultă că graficul $f(x) = ax^2 + c$ *se obține din graficul funcției* $g(x) = ax^2$, *printr-o translație de-a lungul axei* $y'y$, *cu o cantitate egală cu* c *(dacă* $c > 0$, *translația se face în sus, iar dacă* $c < 0$, *translația se face în jos).*

Axa $y'y$ este axă de simetrie a graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + c$ se numește *parabolă*, iar punctul $V(0, c)$ se numește *vîrful parabolei.*

În figura IV.7 sînt date diferitele poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2 + c$ în raport cu valorile numerelor a și c.

4. *Graficul funcției* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

$ax^2 + bx + c$ se poate scrie sub forma:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a},$$

unde am notat cu $\Delta = b^2 - 4ac$ (Δ este discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$). Este clar că pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ avem

$$\boxed{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}} \qquad (1)$$

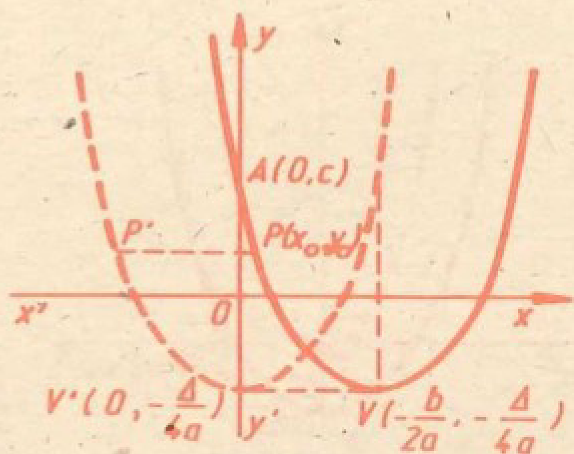


Fig. IV.8

Egalitatea (1) se numește *forma canonică a funcției f.*

Trecem acum la construirea graficului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Considerăm funcția de gradul al doilea $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. În figura IV. 8 am reprezentat punctat graficul funcției g, avînd pe $y'y$ ca axă de simetrie și cu vîrful în $V'\left(0, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Fie $P(x_0, y_0)$ un punct pe graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Din egalitatea (1) se obține $y_0 = f(x_0) = a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ sau $y_0 = g\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)$. Rezultă că punctul $P'\left(x_0 + \frac{b}{2a}, y_0\right)$ aparține graficului funcției g. Se observă că P se obține din P' făcînd o translație paralelă cu axa $x'x$ cu o cantitate egală cu $\frac{-b}{2a}$.
Deci *graficul funcției* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *se obține din graficul funcției* $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$ *printr-o translație paralelă cu axa $x'x$, cu o cantitate egală cu* $\frac{-b}{2a}$ $\Big($dacă $\frac{-b}{2a} > 0$, translația se face spre dreapta, iar dacă $\frac{-b}{2a} < 0$, translația se face spre stînga$\Big)$.

Cum $y'y$ este *axă de simetrie pentru graficul funcției g, atunci dreapta* $x = \frac{-b}{2a}$ *este* axă de simetrie pentru graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ se numește *parabolă*, iar punctul $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ se numește *vîrful* parabolei. Graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ *intersectează axa* $y'y$ în punctul $A(0, f(0))$, unde $f(0) = c$.

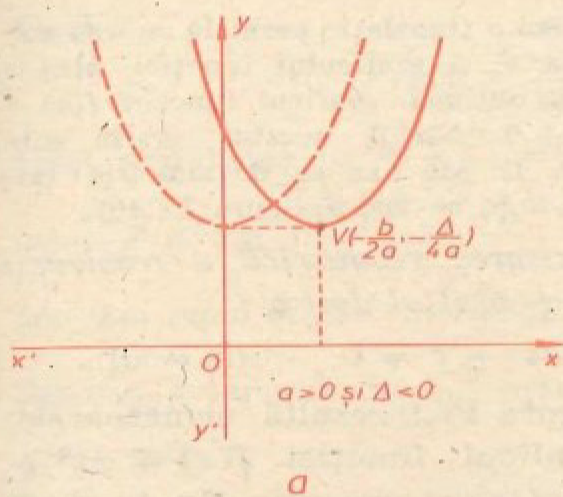
Urmărind figura IV.9 obținem diferite poziții ale graficului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ în raport de valorile lui a și Δ. În figura IV.9, punctat, am reprezentat graficul funcției $g(x) = ax^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

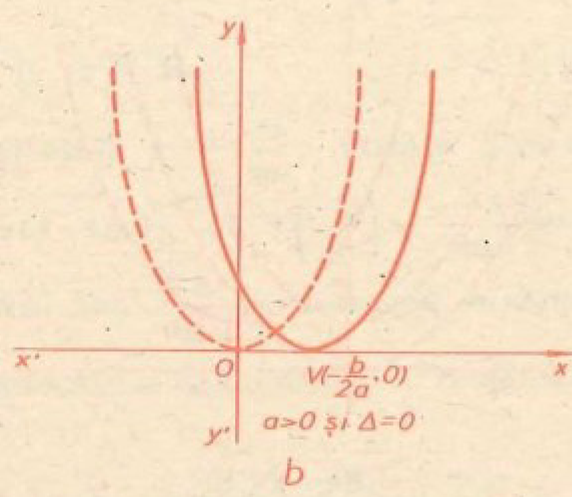
Exemplu. Să construim graficul funcției $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$.
Cum $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 72 = -8$ și $\frac{b}{2a} = \frac{-8}{4} = -2$ rezultă că forma canonică a funcției este $f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$.

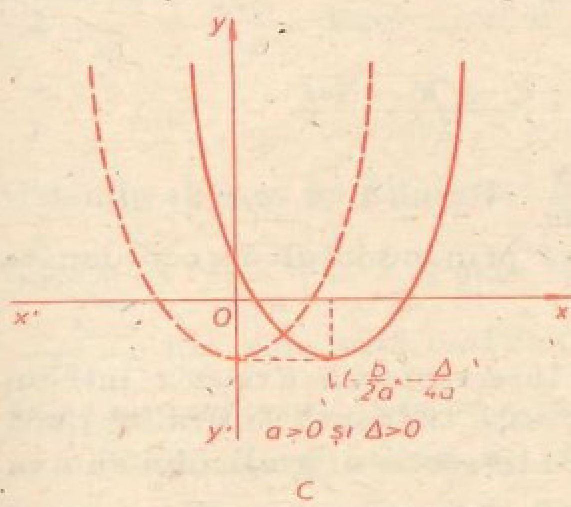
Graficul funcției îl construim astfel:

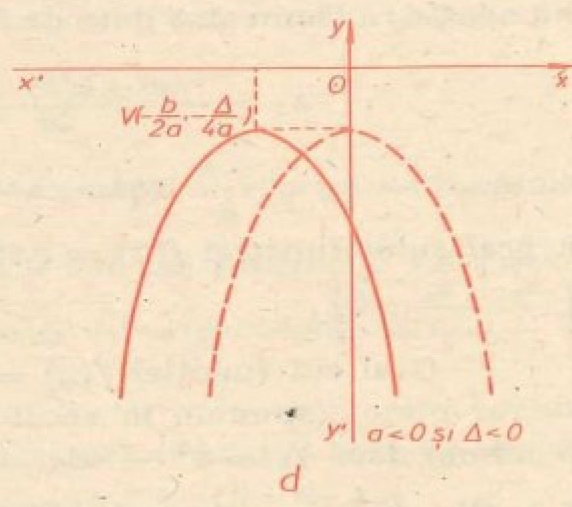
1) Prin puncte construim graficul funcției $g(x) = 2x^2$.

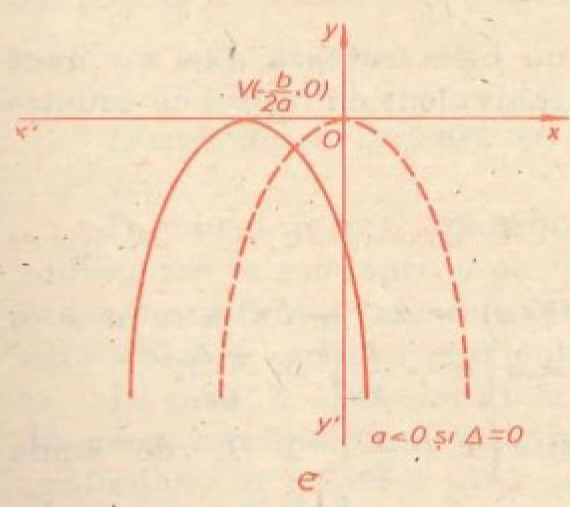
2) Translatăm parabola funcției $g(x) = 2x^2$ de-a lungul axei $y'y$ cu cantitatea 1. Aceasta este graficul funcției $h(x) = 2x^2 + 1$ (a se vedea figura IV.10).


y
x'
O
x
y'
$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$
$a>0$ și $\Delta<0$
a


y
x'
O
x
y'
$V(-\frac{b}{2a}, 0)$
$a>0$ și $\Delta=0$
b


y
x'
O
x
y'
$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$
$a>0$ și $\Delta>0$
c


y
x'
O
x
y'
$V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$
$a<0$ și $\Delta<0$
d


y
x'
O
x
y'
$V(-\frac{b}{2a}, 0)$
$a<0$ și $\Delta=0$
e

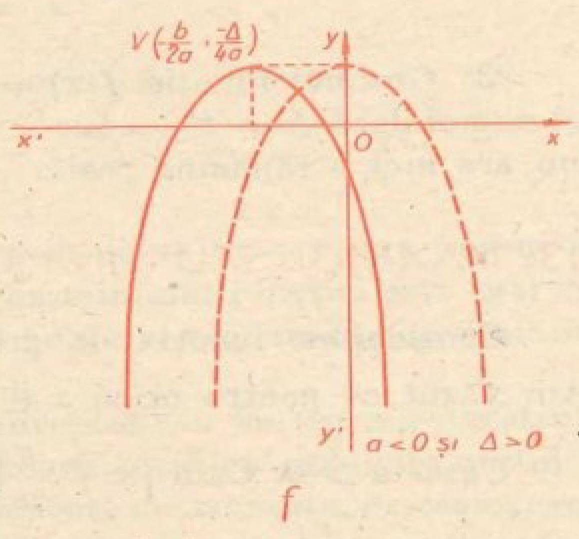

y
x'
O
x
y'
$V(\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$
$a<0$ și $\Delta>0$
f

Fig. IV.9

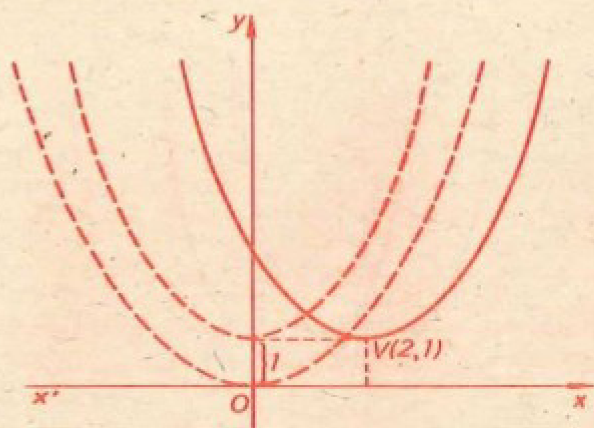


Fig. IV.10

3) Facem o translaţie paralelă cu axa $x'x$, cu cantitatea 2, a graficului funcţiei $h(x) = 2x^2 + 1$ şi obţinem graficul funcţiei $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$. Vîrful acestui grafic este punctul $V(2, 1)$, iar axa sa de simetrie este dreapta $x = 2$ (a se vedea figura IV.10).

Interpretarea geometrică a rezolvării ecuaţiei de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (a \neq 0) .$$

Din figura IV.9 rezultă următoarele:

1° Graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersectează axa $x'x$ în două puncte distincte dacă şi numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Punctele de intersecţie ale acestui grafic cu axa $x'x$ sînt punctele de coordonate $B_1(x_1, 0)$ şi $B_2(x_2, 0)$, unde x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$. Reamintim că aceste rădăcini sînt date de formulele

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ şi } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cum $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, atunci $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$. Rezultă că axa de simetrie a graficului funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ trece prin punctul de coordonate $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0\right)$.

2° Graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersectează axa $x'x$ într-un singur punct (spunem în acest caz că axa $x'x$ este tangentă la grafic) dacă şi numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Punctul de intersecţie al graficului cu axa $x'x$ este $V\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$, care este şi vîrful graficului. Ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ are în acest caz două rădăcini reale egale:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3° Graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ nu intersectează axa $x'x$ dacă şi numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că ecuaţia nu are nici o rădăcină reală.

§3. MAXIMUL SAU MINIMUL FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA

Considerăm funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Am văzut că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$.

Cazul $a > 0$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, atunci şi $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, de unde prin adunarea cantităţii constante $\frac{-\Delta}{4a}$ obţinem că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geqslant \frac{-\Delta}{4a}$.

Deci

$$f(x) \geqslant \frac{-\Delta}{4a}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Cum egalitatea $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ are loc numai cînd $x = \frac{-b}{2a}$, atunci pentru $x = \frac{-b}{2a}$ avem $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$. Inegalitatea (1) arată că $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ este *cea mai mică dintre valorile funcției f.* Numărul real $\frac{-\Delta}{4a}$ se numește *minimul funcției f*, iar valoarea $\frac{-b}{2a}$ este valoarea argumentului x în care se *realizează acest minim.*

Cazul $a < 0$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ și $a < 0$, rezultă $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0$, de unde prin adunarea cantității constante $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem că $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \leqslant \frac{-\Delta}{4a}$. Deci putem scrie

$$f(x) \leqslant \frac{-\Delta}{4a}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Am văzut mai înainte că $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ care, împreună cu inegalitatea (2), arată că $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$ este *cea mai mare dintre valorile funcției f.* Cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ se numește *maximul funcției f*, iar $\frac{-b}{2a}$ este valoarea argumentului x în care se *realizează acest maxim.*

Concluzii. 1) *Dacă* $a > 0$, *funcția* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *are un minim egal cu* $\frac{-\Delta}{4a}$, *minim ce se realizează pentru* $x = \frac{-b}{2a}$.

2) *Dacă* $a < 0$, *funcția* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *are un maxim egal cu* $\frac{-\Delta}{4a}$, *maxim ce se realizează pentru* $x = \frac{-b}{2a}$.

Interpretarea geometrică

În cazul $a > 0$, parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile îndreptate în sus (spre y pozitiv). În acest caz minimul funcției este egal cu *ordonata* vîrfului graficului, iar valoarea lui x în care se realizează acest minim este abscisa vîrfului graficului (fig. IV.11).

În cazul $a < 0$, parabola are ramurile îndreptate în jos (spre y negativ). În acest caz maximul funcției este, de asemenea, egal cu ordonata vîrfului graficului, iar valoarea lui x unde se realizează acest maxim este, de asemenea, egală cu abscisa vîrfului graficului (fig. IV.12).

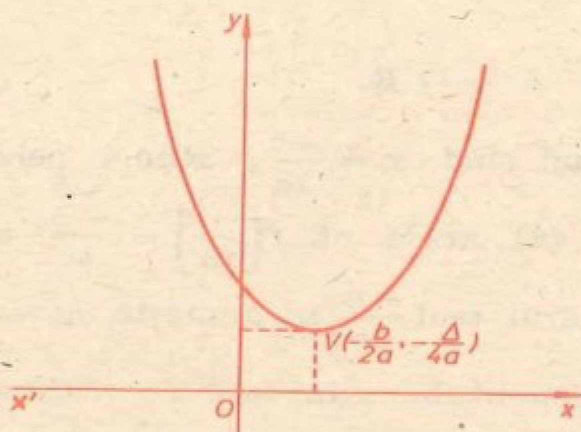


Fig. IV.11

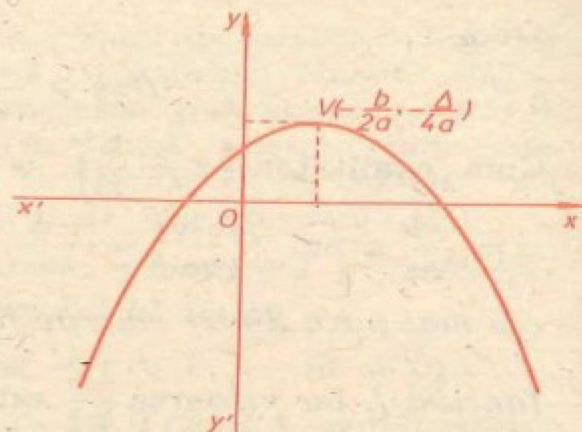


Fig. IV.12

Exemple. 1) Fie funcţia $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Cum $a = 1 > 0$, această funcţie are un minim egal cu $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{16-4}{4} = -3$. Acest minim se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

2) Fie funcţia $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$. Cum $a = -2 < 0$, funcţia f are un maxim egal cu $\frac{-\Delta}{4a} = -\frac{4+8}{-8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$. Acest maxim se realizează pentru $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$.

§4. INTERVALE DE MONOTONIE PENTRU FUNCŢIA DE GRADUL AL DOILEA

Definiţie. Fie $f : A \to B$ o funcţie numerică (adică A şi B sînt submulţimi ale lui $\mathbf{R}$). **Spunem că f este** *crescătoare pe o mulţime* **$I \subset A$, dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leqslant x_2$, avem $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.**

Funcţia f se zice *descrescătoare pe mulţimea $I \subset A$*, **dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 \leqslant x_2$, avem $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.**

Vom spune că f este *strict crescătoare* (respectiv *strict descrescătoare*) pe mulţimea I dacă oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, astfel încît $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) < f(x_2)$ (respectiv oricare ar fi $x_1, x_2 \in I$, cu $x_1 < x_2$, să rezulte $f(x_1) > f(x_2)$). O funcţie numerică $f : A \to B$ crescătoare sau descrescătoare pe o submulţime $I \subset A$ se zice *monotonă* pe I.

Exemplu. Funcţia de gradul întîi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = mx + n$ $(m \neq 0)$ este strict crescătoare dacă $m > 0$ şi strict descrescătoare dacă $m < 0$. Într-adevăr fie $x_1 < x_2$. Dacă $m > 0$, atunci $mx_1 < mx_2$ şi deci şi $mx_1 + n < mx_2 + n$ ceea ce înseamnă că $f(x_1) < f(x_2)$.

Dacă $m < 0$, atunci din inegalitatea $x_1 < x_2$ obţinem $mx_1 > mx_2$ de unde $mx_1 + n > mx_2 + n$, ceea ce înseamnă că $f(x_1) > f(x_2)$.

Relativ la funcţia de gradul al doilea, vom demonstra:

Teorema. Fie funcţia de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

1° Dacă $a > 0$, funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

2° **Dacă $a < 0$, funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.** (**Intervalele $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ și $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc** *intervale de monotonie ale funcției f.*)

Demonstrație 1° Vom presupune că $a > 0$. Pornim tot de la forma canonică a funcției f, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. Fie x_1, x_2 două numere reale care se găsesc în intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deci putem scrie

$$x_1 < x_2 \leqslant \frac{-b}{2a}$$

de unde prin adunarea cantității $\frac{b}{2a}$, obținem:

$$x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} \leqslant 0.$$

Prin ridicare la pătrat se deduce că

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Prin înmulțire cu numărul pozitiv a, obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ obținem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau, altfel scris: $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$. Presupunem acum că numerele x_1, x_2 se găsesc în intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deci putem scrie

$$\frac{-b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$$

de unde prin adunarea cantității $\frac{b}{2a}$, obținem:

$$0 \leqslant x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a}.$$

Prin ridicare la pătrat obţinem:

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Prin înmulţire cu $a > 0$ şi adunarea cantităţii $\frac{-\Delta}{4a}$ obţinem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce înseamnă că f este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$.

2° Presupunem că $a < 0$. Fie x_1, x_2 numere reale din intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Am văzut la pct. 1° că

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2$$

care, prin înmulţirea cu numărul a negativ, ne conduce la inegalitatea

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ obţinem:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

sau altfel scris: $f(x_1) < f(x_2)$, ceea ce ne arată că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.

Presupunem acum că numerele x_1, x_2 sînt în intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$ aşa încît $x_1 < x_2$. Am văzut la pct. 1° că avem

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2,$$

din care, prin înmulţire cu numărul negativ a, se obţine:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Adunînd cantitatea $\frac{-\Delta}{4a}$ rezultă:

$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \text{ sau } f(x_1) > f(x_2).$$

Deci, f este strict descrescătoare pe intervalul $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right)$. Este foarte sugestiv a se transpune afirmațiile 1° și 2° din teorema de mai sus în următoarele tabele:

	x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$a > 0$	$f(x)$		$\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$ minim	$\nearrow$	

	x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$a < 0$	$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$ maxim	$\searrow$	

În ambele tabele, înclinația săgeților indică intervalul pe care funcția este strict descrescătoare sau strict crescătoare.

Interpretare geometrică

Cazul $a > 0$. Parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile în sus (fig. IV.13). Fie $P(x_0, y_0)$ un punct arbitrar pe parabolă avînd proiecția pe axa $x'x$ în Q. Cînd Q se apropie de la stînga la dreapta de punctul $A\left(\frac{-b}{2a}, 0\right)$, atunci punctul P coboară. Cînd punctul Q se îndepărtează de punctul A spre dreapta, punctul P urcă pe ramura din dreapta a parabolei.

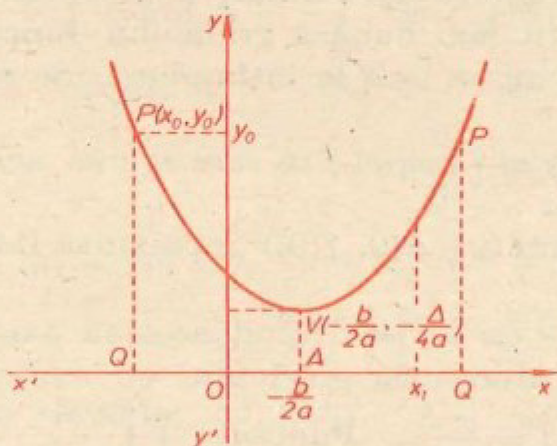


Fig. IV.13

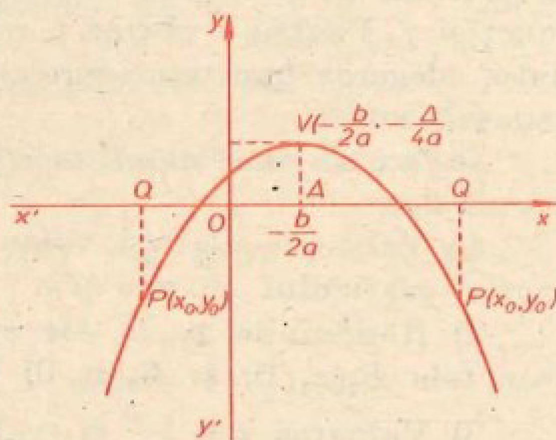


Fig. IV.14

Cazul $a < 0$. Parabola funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ are ramurile în jos (fig. IV.14). Cînd Q se apropie de punctul A de la stînga la dreapta, punctul P urcă pe ramura din stînga a parabolei, iar cînd Q se îndepărtează de A spre dreapta, punctul P coboară pe ramura din dreapta a parabolei.

Exemple. 1) Fie funcţia $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Cum $a = 2$ şi $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}$, funcţia este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$ şi strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Tabelul asociat este următorul:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x) = 2x^2 - x + 1$		$\searrow$	$\frac{7}{8}$ minim	$\nearrow$	

2) Fie funcţia $f(x) = -x^2 + 2$. Cum $a = -1 < 0$ şi $\frac{-b}{2a} = 0$, funcţia este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$. Tabelul asociat este următorul:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = -x^2 + 2$		$\nearrow$	2 maxim	$\searrow$	

§5. TABELUL DE VARIAŢIE ŞI TRASAREA GRAFICULUI FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA

Am văzut că graficul funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$ se poate construi în mai multe etape pornind de la funcţii simple al căror grafic îl construim prin „puncte" şi apoi se fac una sau două translaţii. Dar în practică se construieşte graficul prin „puncte", adică se reprezintă un număr cît mai mare de puncte ale graficului care apoi se unesc între ele cu linii continue, iar figura geometrică ce se obţine constituie o reprezentare aproximativă a parabolei funcţiei f. Pentru a obţine o reprezentare cît mai bună a graficului funcţiei date, alegerea punctelor care se reprezintă nu se face la întîmplare. Se procedează astfel:

Se face un tabel numit tabelul de variaţie al funcţiei f în care se trec următoarele date:

1) Valoarea $x=0$ şi valoarea $f(0)$. Punctul $A(0, f(0))$ reprezintă intersecţia graficului cu axa $y'y$.

2) Rădăcinile x_1, x_2 ale ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ cînd acestea există. Punctele $B_1(x_1, 0)$ şi $B_2(x_2, 0)$ reprezintă intersecţia graficului cu axa $x'x$.

3) Valoarea $x = \frac{-b}{2a}$ şi valoarea $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$. Punctul $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ reprezintă vîrful graficului. În tabel se mai specifică dacă $\frac{-\Delta}{4a}$ este un minim sau un maxim. (La trasarea graficului se are în vedere că dreapta $x = \frac{-b}{2a}$ este axă de simetrie.)

4) Se indică prin săgeți intervalele de monotonie ale funcției.

5) Pentru a obține o reprezentare cît mai exactă a graficului, în tabel se trec eventual și alte valori ale lui x, precum și valorile corespunzătoare $f(x)$.

Exemplu. Să se reprezinte graficul funcției $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Tabelul de variație al funcției este:

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x - 3$		$\searrow$	0	$\searrow$	-4 minim	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Punctul $A(0, -3)$ este la intersecția graficului cu axa $y'y$.

Punctele $B_1(-3, 0)$ și $B_2(1, 0)$ sînt intersecțiile graficului cu axa $x'x$, iar $V(-1, -4)$ este vîrful parabolei. Graficul funcției $f(x) = x^2 + 2x - 3$ este redat în figura IV.15.

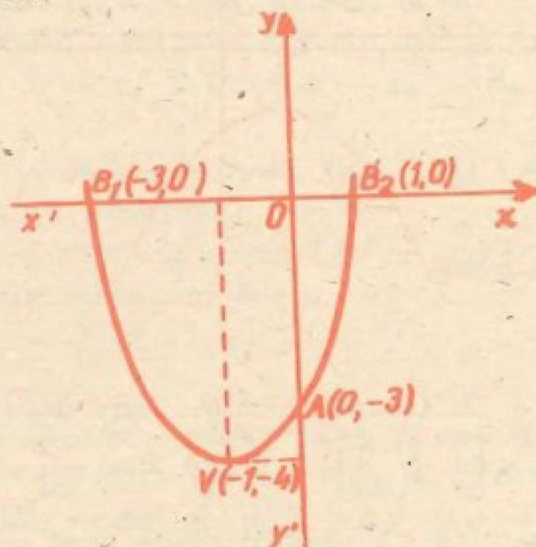


Fig. IV.15

§6. SEMNUL FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

A studia semnul funcției de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, înseamnă a determina valorile lui x pentru care $f(x)$ este un număr pozitiv și valorile lui x pentru care $f(x)$ este negativ. În studiul semnului funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$, un rol important îl joacă discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$. Vom avea următoarele cazuri:

1. *Cazul* $\Delta < 0$. Folosim forma canonică a funcției f; $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. Cum $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ este pătrat perfect atunci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$. Dacă $a > 0$, atunci $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ și $\frac{-\Delta}{4a} > 0$ care, adunate, dau

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} > 0.$$

Deci, în acest caz, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, avem $f(x) > 0$. Dacă $a < 0$, atunci

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant 0 \text{ și } \frac{-\Delta}{4a} < 0$$

care, adunate, ne dau:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} < 0.$$

Deci, în acest caz, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$.

Putem enunța regula:

Dacă $\Delta < 0$, atunci $f(x)$ are același semn ca al lui a, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Acest rezultat se trece într-un tabel în felul următor:

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$+\infty$
	$f(x)$	semnul lui a	

Grafic tabelul este transpus în figura IV.16.

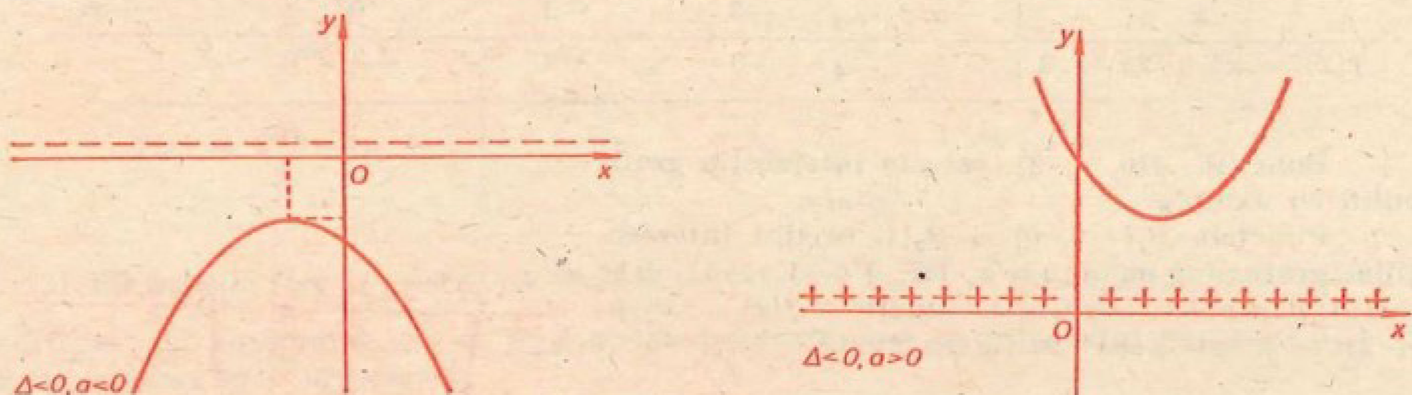


Fig. IV.16

2. *Cazul* $\Delta = 0$. În acest caz, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Dacă $x \neq \frac{-b}{2a}$, atunci $\left(x + \frac{b}{2a}\right) \neq 0$ și deci $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$. Rezultă că pentru orice $x \neq \frac{-b}{2a}$ semnul lui $f(x)$ este același cu al lui a.

Dacă $x = \frac{-b}{2a}$, atunci $f(x) = 0$. Putem enunța regula:

Dacă $\Delta = 0$, *atunci* $f(x)$ *are același semn cu al lui* a, *oricare ar fi* $x \in \mathbf{R}$, *cu excepția lui* $x = \frac{-b}{2a}$, *unde* f *ia valoarea zero.* Acest rezultat se trece în tabelul următor:

$\Delta = 0$	x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
	$f(x)$		semnul lui a	0	semnul lui a	

Grafic tabelul este transpus în figura IV.17.

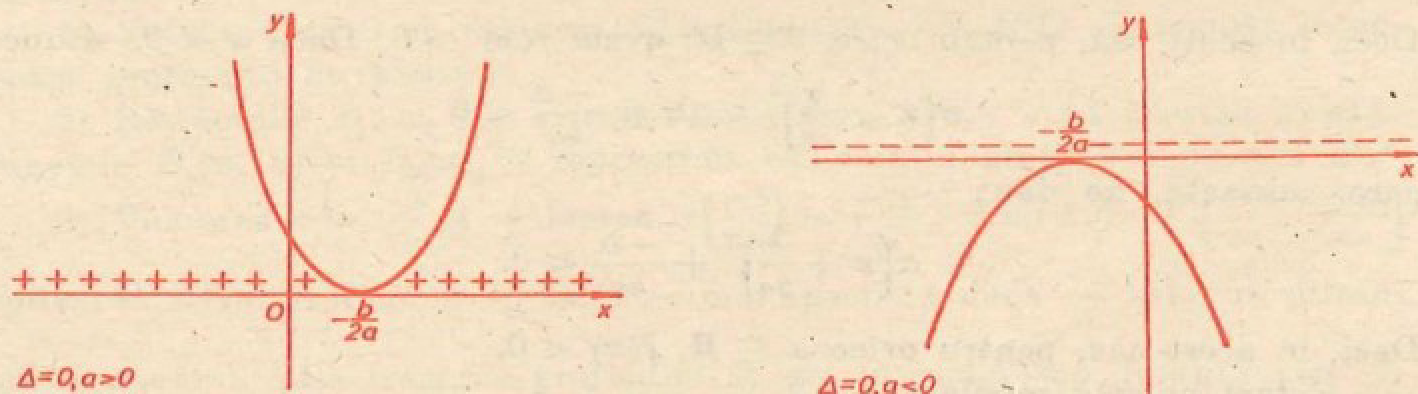


Fig. IV.17

3. *Cazul* $\Delta > 0$. În acest caz ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două rădăcini reale x_1 și x_2, distincte. Mai mult, trinomul $aX^2 + bX + c$ se descompune în factori de gradul întîi:

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)\,(X - x_2).$$

Deci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f(x) = a(x - x_1)\,(x - x_2)$. Cum $x_1 \neq x_2$ putem presupune că $x_1 < x_2$. Dacă numărul real x nu aparține intervalului $[x_1, x_2]$, atunci $x < x_1$ sau $x_2 < x$. Presupunem că $x < x_1$, atunci și $x < x_2$. Deci $x - x_1 < 0$ și $x - x_2 < 0$ de unde rezultă că $(x - x_1)\,(x - x_2) > 0$.

În situația $x_2 < x$ avem $x_1 < x$ și deci $x - x_1 > 0$ și $x - x_2 > 0$, de unde rezultă că $(x - x_1)\,(x - x_2) > 0$.

Deci, cînd x nu aparține intervalului $[x_1, x_2]$, obținem $(x - x_1)\,(x - x_2) > 0$ și deci semnul lui $f(x)$ este același cu semnul lui a.

Dacă x se găsește între rădăcini, adică $x_1 < x < x_2$, atunci $(x - x_1)\,(x - x_2) < 0$ și deci semnul lui $f(x)$ este contrar semnului lui a.

Cînd $x = x_1$ sau $x = x_2$, $f(x) = 0$.

Putem enunța regula:

Dacă $\Delta > 0$, *atunci* $f(x)$ *are semnul lui a în afara rădăcinilor și are semn contrar lui a în intervalul dintre rădăcini, cu excepția lui* $x = x_1$ *și* $x = x_2$, *unde f ia valoarea zero.* (x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$.) Acest rezultat se reprezintă în tabelul următor:

$\Delta > 0$	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
	$f(x)$		semnul lui a	0	semn contrar lui a	0	semnul lui a	

Grafic tabelul este transpus în figura IV.18.

Fig. IV.18

Exemple. 1) Fie funcția $f(x) = x^2 + 2x + 3$. Cum $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, ne găsim în primul caz. Cum $a = 1 > 0$, tabelul semnului funcției este următorul:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = x^2 + 2x + 3$	+ + + + + + + + +	

2) Fie funcţia $f(x) = -x^2 - 2x - 1$. Cum $\Delta = 4 - 4 = 0$ şi $a = -1$, tabelul cu semnul funcţiei f este următorul:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a} = -1$		$+\infty$
$f(x) = -x^2 - 2x - 1$		$- - - - -$	0	$- - - - - -$	

3) Fie funcţia $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Cum $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, atunci ecuaţia $x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcini reale şi distincte. Acestea sînt $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$. Tabelul semnului funcţiei este următorul:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x) = x^2 - 3x + 2$		$+ + + +$	0	$- - -$	0	$+ + + + + +$	

§7. APLICAŢII ALE SEMNULUI FUNCŢIEI DE GRADUL AL DOILEA

1. *Inecuaţii de gradul al doilea*

Inecuaţiile de forma

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ şi

$ax^2 + bx + c \leqslant 0$, unde a, b, c sînt numere reale date, $a \neq 0$, se numesc *inecuaţii de gradul al doilea.*

Observaţie. În practică vom considera orice inecuaţie care se reduce, folosind proprietăţile inegalităţilor, la o inecuaţie de gradul al doilea.

Rezolvarea inecuaţiilor de gradul al doilea este o consecinţă imediată a studiului semnului funcţiei $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuaţia $x^2 - 3x + 2 > 0$. Se vede că $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$, sînt $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$. Tabelul semnului funcţiei $f(x) = x^2 - 3x + 2$ este următorul:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+ + + +$	0	$- - - -$	0	$+ + + +$	

Din acest tabel rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

2) Să se rezolve inecuaţia $2x^2 + x \leqslant 1$. Această inecuaţie este echivalentă cu inecuaţia $2x^2 + x - 1 \leqslant 0$. Se vede că $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ şi rădăcinile ecuaţiei $2x^2 + x - 1 = 0$ sînt $x_1 = -1$ şi $x_2 = \frac{1}{2}$. Tabelul semnului funcţiei $f(x) = 2x^2 + x - 1$ este următorul:

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + + + +$	

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

3) Să se rezolve inecuaţia $x^2 < 2x - 3$. Această inecuaţie este echivalentă cu inecuaţia $x^2 - 2x + 3 < 0$. Cum $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$, atunci semnul funcţiei $f(x) = x^2 - 2x + 3$ este următorul:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+ + + + + + + + +	

Din acest tabel, rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este mulţimea vidă, adică nu există nici un număr real care să verifice inecuaţia $x^2 < 2x - 3$.

4) Să se rezolve inecuaţia $(x - 1)^2 > 2x - 3$. Această inecuaţie este echivalentă cu inecuaţia $x^2 - 2x + 1 > 2x - 3$ care este echivalentă la rîndul său cu inecuaţia $x^2 - 4x + 4 > 0$. Avem $\Delta = 16 - 16 = 0$. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 4x + 4 = 0$, sînt $x_1 = x_2 = 2$. Tabelul semnului funcţiei $f(x) = x^2 - 4x + 4$ este următorul

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		+ + +	0	+ + +	

Din acest tabel rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $\mathbf{R} - \{2\}$.

2. *Sisteme de inecuaţii de gradul al doilea*

Prin *sistem de inecuaţii de gradul al doilea* se înţelege un sistem de inecuaţii în care cel puţin una dintre inecuaţii este de gradul al doilea, iar celelalte inecuaţii ce compun sistemul sînt de gradul întîi sau gradul al doilea.

Observaţie. În practică vom considera orice sistem de inecuaţii care se reduce, folosind proprietăţile inegalităţilor, la un sistem de inecuaţii de gradul al doilea.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul de inecuaţii

$$(S)\begin{cases} x + 5 \geqslant 4x + 3, \\ 2x + 1 > 3x - 1, \\ x^2 + 2x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Sistemul (S) este echivalent cu sistemul de inecuaţii de gradul al doilea

$$\begin{cases} -3x + 2 \geqslant 0, \\ -x + 2 > 0, \\ x^2 + 2x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $-3x + 2 \geqslant 0$ este $M_1 = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$.

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $-x + 2 > 0$ este $M_2 = (-\infty, 2)$.

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$ este $M_3 = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$. Atunci mulţimea soluţiilor sistemului (S) este $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-\infty, -3]$.

3) Să se rezolve sistemul de inecuaţii

$$(S)\begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geqslant 0, \\ 2x + 1 < 2 - x. \end{cases}$$

Folosind proprietăţile inegalităţilor sistemul (S) este echivalent cu sistemul de gradul doi

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \geqslant 0, \\ 3x - 1 < 0. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + 2x + 3 > 0$, este $M_1 = \mathbf{R}$.
Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ este $M_2 = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.
Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $3x - 1 < 0$ este $M_3 = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.
Atunci, mulţimea soluţiilor sistemului (S) este $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-\infty, -1]$.

3. *Semnul expresiei* $E = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ *unde* $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ *sînt numere reale date.*

A determina semnul expresiei E, revine la a determina pentru ce valori reale ale lui x expresia este pozitivă şi pentru ce valori reale ale lui x expresia este negativă.

Se ştie că: 1° o fracţie este pozitivă dacă şi numai dacă numărătorul şi numitorul au acelaşi semn şi 2° ea este negativă dacă numărătorul şi numitorul sînt de semne contrarii.

Rezultă că pentru a determina semnul expresiei E, vom determina semnele funcţiilor $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ şi $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, care se trec într-un tabel. Ţinînd cont de 1° şi 2° se obţine semnul expresiei E.

Exemplu. Să se determine semnul expresiei $E = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 1}$. Considerăm funcţiile $f_1(x) = x^2 - 5x + 6$ şi $f_2(x) = x - 1$. Rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 5x + 6 = 0$ sînt $x_1 = 2$ şi $x_2 = 3$, iar rădăcina ecuaţiei $x - 1$ este 1. Facem următorul tabel cu semnele funcţiilor f_1 şi f_2:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f_1(x)$		+ + + + + + +			0	− − −	0	+ + + + +	
$f_2(x)$		− − − −	0	+ +	+	+ +	+	+ + + +	
E		− − − −	|	+ + +	0	− − −	0	+ + + +	

Din tabel rezultă că expresia E este pozitivă pentru $x \in (1, 2) \cup (3, +\infty)$, negativă pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3)$ şi este egală cu zero pentru $x = 2$ şi $x = 3$. Expresia E nu are sens pentru $x = 1$.

Studiul semnului expresiei de forma $E = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$ ne ajută la rezolvarea inecuaţiilor de forma $E > 0$, $E \geqslant 0$, $E < 0$ şi $E \leqslant 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} > -1.$$

Inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} + 1 > 0$*, care este echivalentă cu inecuaţia $\frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4} > 0$. Vom determina semnul expresiei $E = \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4}$.

* Este greşit de scris $x^2 - 1 > -1(x^2 - 4)$, deoarece $x^2 - 4$ poate fi pozitiv sau negativ.

Facem tabelul

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$+\infty$
$2x^2-5$	+ + + + +	+ + + + +	0 — — —	0 + + +	+ + +	
x^2-4	+ + +	0 — — — —	— — — —	— — —	0 + +	
E	+ + +	| — —	0 + + +	0 — — —	| + +	

Din acest tabel rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $(-\infty, -2) \cup \cup\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cup (2, +\infty)$.

2) Să se rezolve inecuaţia

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leqslant 1.$$

Această inecuaţie este echivalentă cu inecuaţia $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{x^2+x+1} \leqslant 0.$

Determinăm semnul expresiei $E = \frac{-2x}{x^2+x+1}$. Facem tabelul:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	+ + + +	0 — — — — — —	
x^2+x+1	+ + + +	+ + + + + + +	
E	+ + + +	0 — — — — — —	

Din acest tabel rezultă că mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este $[0, +\infty)$.

4. *Inecuaţii cu modul*

1) Să se rezolve inecuaţia: $|x^2-x-2| \leqslant 1$.
Rezolvarea acestei inecuaţii este echivalentă cu rezolvarea inecuaţiei

$$-1 \leqslant x^2-x-2 \leqslant 1,$$

care la rîndul său este echivalentă cu rezolvarea sistemului de inecuaţii

$$\begin{cases} x^2-x-2 \leqslant 1 \\ x^2-x-2 \geqslant -1. \end{cases}$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2-x-2 \leqslant 1$ este $M_1 = \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.
Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2-x-2 \geqslant -1$ este

$$M_2 = \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei date este

$$M = M_1 \cap M_2 = \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right].$$

2) Să se rezolve inecuația $|x^2 - 3x + 2| \leqslant x + 7$.

Ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$.

Rezultă că pentru $x \in [1, 2]$ avem $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$ și pentru $x \in \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ avem $x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$.

1° Considerăm cazul cînd $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. Inecuația dată se scrie în acest caz, astfel:

$$x^2 - 3x + 2 \leqslant x + 7$$

care are soluții, mulțimea $M_1 = [-1, 5]$.

Rezultă că pentru $x \in [-1, 1] \cup [2, 5]$ inecuația $|x^2 - 3x - 2| \leqslant x + 7$ este verificată.

2° Considerăm cazul cînd $x \in (1, 2)$. În acest caz inecuația dată se scrie, astfel:

$$-(x^2 - 3x + 2) \leqslant x + 7.$$

care este echivalentă cu inecuația:

$$x^2 - 2x + 9 \geqslant 0.$$

Această inecuație are ca soluții mulțimea $M_2 = \mathbf{R}$.

Rezultă că pentru $x \in (1, 2)$ inecuația $|x^2 - 3x - 2| \leqslant x + 7$ este verificată.

În concluzie mulțimea soluțiilor inecuației date este:

$$M = [-1, 1] \cup [2, 5] \cup (1, 2) = [-1, 5].$$

§8. APLICAȚII PRACTICE ALE STUDIULUI FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

Așa cum am spus și în § 1, există numeroase exemple practice care au impus studiul funcției de gradul al doilea. În continuare vom prezenta cîteva dintre ele.

1) Dintr-un turn de înălțime h_0 se aruncă o piatră pe verticală în sus cu viteza inițială v_0. Să se afle:

i) la ce înălțime maximă ajunge piatra;

ii) după cît timp piatra ajunge pe pămînt.

Caz numeric: $h_0 = 30$ m, $v_0 = 20$ m/s.

Soluție. i) Înălțimea $h(t)$ la care ajunge piatra la momentul t este dată de formula:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2, \text{ unde } g = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

Pentru a calcula înălțimea maximă h_{max} la care ajunge piatra determinăm maximul funcției $h(t)$ care este

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

ii) Pentru a determina după cît timp piatra ajunge pe pămînt trebuie să determinăm pe t astfel încît $h(t) = 0$. Deci avem de determinat rădăcinile ecuației:

$$h_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2 = 0.$$

Rezolvînd această ecuaţie găsim soluţiile:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Deoarece $v_0 < \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$, atunci timpul după care ajunge piatra pe pămînt este egal cu

$$t_0 = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}.$$

Dacă $h_0 = 30$ m şi $v_0 = 20$ m/s, atunci $h_{max} \approx 50$ m şi $t_0 \approx 5,5$ s.

2) Din apropierea unui turn avînd înălţimea h_0 este aruncată o piatră vertical în sus de la suprafaţa pămîntului cu viteza iniţială v_0.

i) Cît trebuie să fie v_0 pentru ca piatra să depăşească înălţimea turnului?

ii) În ipoteza că piatra depăşeşte înălţimea turnului să se determine cît timp rămîne deasupra lui.

Caz numeric: $h_0 = 20$ m, $v_0 = 25$ m/s.

Soluţie. i) La momentul t, piatra se va găsi la înălţimea $h(t)$ dată de formula

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \text{ unde } g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Pentru ca piatra să depăşească înălţimea turnului trebuie ca $h(t) > h_0$, pentru un $t > 0$.

Avem inecuaţia de gradul al doilea în t

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 > h_0$$

sau

$$g t^2 - 2 v_0 t + 2 h_0 < 0. \tag{1}$$

Cum g este pozitiv trebuie ca discriminantul $\Delta = 4v_0^2 - 8gh_0$ să fie pozitiv, adică

$$4v_0^2 - 8gh_0 > 0 \text{ de unde } v_0 > \sqrt{2gh_0}.$$

Deci ca piatra să se ridice deasupra turnului viteza sa v_0 trebuie să fie mai mare ca $\sqrt{2gh_0}$.

ii) Să presupunem acum că $v_0 > \sqrt{2gh_0}$. Rezolvînd inecuaţia (1) obţinem că

$$\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g} < t < \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}.$$

Dacă notăm $t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}$, $t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}$ se observă că $t_1 > 0$ şi $t_2 > 0$, iar intervalul (t_1, t_2) este intervalul de timp în decursul căruia piatra se găseşte deasupra turnului.

Deci piatra se găseşte deasupra turnului un timp egal cu

$$t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g}.$$

Caz numeric. Deoarece $\sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 20} \approx 20$, atunci $v_0 > 20$.

Deci piatra, prin aruncare, depăşeşte înălţimea turnului.

Timpul cît ea se găseşte deasupra turnului este egal cu

$$\frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh_0}}{g} = \frac{2\sqrt{625 - 2 \cdot 9,8 \cdot 20}}{9,8} \approx 3\text{s}.$$

3) Dintr-o sîrmă cu lungimea de 10 m se confecționează un dreptunghi. Cum trebuie să fie acest dreptunghi pentru ca aria sa să fie maximă?

Soluție. Dacă x și y sînt laturile dreptunghiului, atunci $2x + 2y = 10$ adică $x + y = 5$. Aria dreptunghiului este

$$S = xy = x(5 - x) = 5x - x^2.$$

Pentru a determina maximul lui S vom determina maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = 5x - x^2,$$

care este $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{25}{4}$ și se realizează pentru $x = \frac{5}{2} = 2{,}5$. Deci laturile dreptunghiului pentru care aria sa este maximă sînt: $x = 2{,}5$ m și $y = 2{,}5$ m. Deci dreptunghiul trebuie să fie un pătrat, iar aria sa maximă este $S_{max} = 6{,}25$ m².

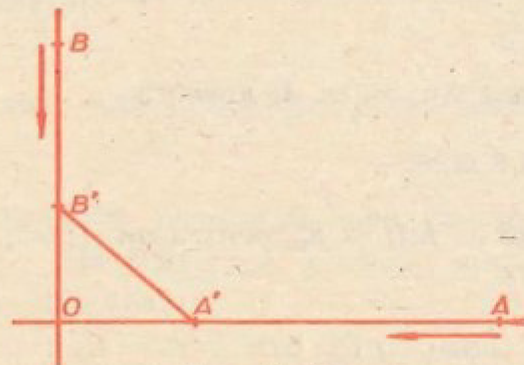


Fig. IV.19

4) Din două orașe A și B situate pe două șosele perpendiculare pleacă în același moment două vehicule cu vitezele constante v_1 și v_2, în direcția punctului O de intersecție a celor două drumuri (fig. IV.19).

Distanțele orașelor A și B față de punctul de intersecție fiind a, respectiv b, să se determine distanța cea mai mică dintre cele două vehicule.

Caz numeric: $v_1 = 80$ km/h, $v_2 = 60$ km/h; $a = 120$ km și $b = 100$ km.

Soluție. Presupunem că după timpul t primul vehicul ajunge în A' iar al doilea vehicul în B'.

Avem $AA' = v_1t$, $BB' = v_2t$ și deci $OA' = a - v_1t$, $OB' = b - v_2t$. Din teorema lui Pitagora avem.

$$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2,$$

de unde $A'B'^2 = (a - v_1t)^2 + (b - v_2t)^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2$ și deci $A'B' = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2}$.

Este clar că distanța dintre cele două vehicule este minimă cînd expresia de sub radical este minimă. Deci vom determina minimul funcției de gradul al doilea

$$f(t) = (v_1^2 + v_2^2)t^2 - 2(av_1 + bv_2)t + a^2 + b^2.$$

Minimul funcției f este

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4[(av_1 + bv_2)^2 - (v_1^2 + v_2^2)(a^2 + b^2)]}{4(v_1^2 + v_2^2)} =$$

$$= \frac{(v_1^2 + v_2^2)(a^2 + b^2) - (av_1 + bv_2)^2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{(av_2 - bv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

și este realizat pentru $t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$.

Deci minimul distanței este dat de $A'B' = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

În cazul numeric, minimul distanței, $A'B' = \frac{|120 \cdot 60 - 100 \cdot 80|}{\sqrt{80^2 + 60^2}} = \frac{800}{100} = 8$ (km)

Aceasta are loc după un timp egal cu

$$t = \frac{120 \cdot 80 + 100 \cdot 60}{80^2 + 60^2} = 1{,}5 \text{ ore.}$$

5) Fie o fereastră avînd forma din figura IV.20, la bază fiind dreptunghiulară iar în partea de sus fiind un semicerc. Pentru ce lungime totală de toc de fereastră avem lumina maximă a ferestrei?

Soluție. Fie $2r$ lungimea bazei ferestrei care este egală cu diametrul semicercului și h înălțimea ei (fig. IV.20). Vom nota cu p lungimea totală a tocului de fereastră și S aria totală a ferestrei. Avem $p = 2r + 2h + \pi r$,

$$S = 2rh + \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2} + r(p - 2r - \pi r) = \frac{\pi r^2}{2} + rp - 2r^2 - \pi r^2 = -\frac{\pi + 4}{2} r^2 + rp.$$

Maximul lui S este egal cu maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = -\frac{\pi + 4}{2} x^2 + px.$$

Acest maxim este deci

$$S_{max} = \frac{p^2}{2(\pi + 4)}$$

și este realizat cînd $x = \frac{p}{\pi + 4}$.

Deci trebuie ca $r = \frac{p}{\pi + 4}$ și prin urmare din egalitatea

$$p = 2r + 2h + \pi r$$

obținem că $r = h$.

În concluzie aria S este maximă pentru $r = h = \frac{p}{\pi + 4}$.

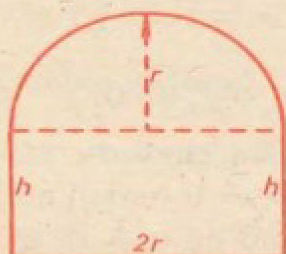


Fig. IV.20

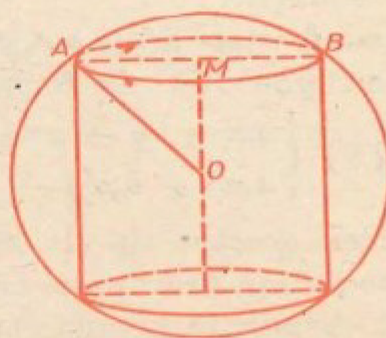


Fig. IV.21

6) Să se taie dintr-o bucată de metal de formă sferică un cilindru avînd aria laterală maximă.

Soluție. Să notăm cu R raza sferei (care este dată), cu r și h, raza, respectiv înălțimea cilindrului care este tăiat din sfera de metal (fig. IV.21). Dacă S este aria laterală a cilindrului, atunci

$$S = 2\pi rh.$$

În triunghiul dreptunghic OAM avem $OA = R$, $OM = \frac{h}{2}$ și $AM = r$.

Din teorema lui Pitagora obținem:

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 \text{ sau } R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2, \text{ de unde}$$

$$h^2 = 4R^2 - 4r^2.$$

Atunci $S^2 = 4\pi^2r^2h^2 = 4\pi^2r^2(4R^2 - 4r^2)$.
Este clar că S este maximă dacă și numai dacă S^2 este maximă.
Deoarece $4\pi^2$ este un număr, atunci S^2 este maximă cînd cantitatea $r^2(4R^2 - 4r^2)$ este maximă. Notînd $r^2 = x$, avem că $r^2(4R^2 - 4r^2)$ este maximă cînd $x(4R^2 - 4x)$ este maximă. Deci totul revine la a determina maximul funcției de gradul al doilea

$$f(x) = -4x^2 + 4R^2x.$$

Acest maxim este egal cu

$$-\frac{\Delta}{4a} = R^4$$

și se realizează pentru $x = \frac{1}{2}R^2$. Deci $S_{max} = 2\pi R^2$ și $r^2 = \frac{1}{2}R^2$, adică $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

În concluzie, ca cilindrul tăiat din sfera de metal să aibă aria laterală maximă trebuie ca raza cilindrului să fie $r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

§9. REZOLVAREA CÎTORVA SISTEME DE ECUAȚII CU COEFICIENȚI REALI

În acest paragraf avem în vedere cîteva tipuri de sisteme de ecuații cu coeficienți reali a căror rezolvare se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea. Trebuie să remarcăm că ori de cîte ori rezolvăm un sistem de ecuații avem în vedere numai soluțiile reale ale acestui sistem.

Vom indica în continuare modul de rezolvare a următoarelor tipuri de sisteme de ecuații:

1. *Sisteme formate dintr-o ecuație de gradul al doilea și una de gradul întîi.* Aceste sisteme sînt de forma:

$$(S)\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0. \end{cases}$$

Rezolvarea acestui tip de sisteme se face prin metoda *substituției*. În prima ecuație putem presupune că, sau $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ (cazul cînd $a = b = 0$ ne-ar duce la dispariția primei ecuații). Presupunînd că $b \neq 0$, atunci ecuația $ax + by + c = 0$ este echivalentă cu ecuația $y = \frac{-c - ax}{b} = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
Dacă substituim pe y în cea de-a doua ecuație a sistemului (S), atunci (S) este echivalent cu sistemul:

$$(S')\begin{cases} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \\ a_1x^2 + b_1x\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + c_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)^2 + d_1x + e_1\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right) + \\ \qquad + f_1 = 0. \end{cases}$$

Efectuînd calculele în ecuația a doua a sistemului (S') obținem în general o ecuație de gradul al doilea care, rezolvată, ne dă valorile lui x. Apoi, înlocuindu-le în prima ecuație din sistemul (S') obținem valorile lui y.

Discuție. 1) Dacă ecuația a doua a sistemului (S') are două rădăcini reale, atunci sistemul (S) are două soluții reale.

2) Dacă ecuația a doua din sistemul (S') are două rădăcini egale, sau, în cazul cînd aceasta este o ecuație de gradul întîi, atunci sistemul (S) are o soluție reală.

3) Dacă ecuația a doua din sistemul (S') nu are nici o rădăcină reală, atunci sistemul (S) nu are soluții reale.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul

$$(S_1) \begin{cases} 2x + y = 1, \\ y^2 = x^2 - 3x + 3. \end{cases}$$

Cum ecuația $2x + y = 1$ este echivalentă cu ecuația $y = 1 - 2x$, sistemul (S_1) este echivalent cu sistemul (S_1'):

$$(S_1') \begin{cases} y = 1 - 2x, \\ (1 - 2x)^2 = x^2 - 3x + 3. \end{cases}$$

Ecuația a doua a sistemului (S_1') se reduce la ecuația de gradul al doilea

$$3x^2 - x - 2 = 0,$$

care are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Pentru $x_1 = 1$ obținem $y_1 = -1$, iar pentru $x_2 = -\frac{2}{3}$ obținem $y_2 = \frac{7}{3}$.

Deci $\begin{cases} x_1 = +1 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{7}{3} \end{cases}$ sînt soluțiile sistemului (S_1).

2) Să se rezolve sistemul

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x^2 - xy - y^2 + x - 3 = 0. \end{cases}$$

Ecuația $x - y - 1 = 0$ este echivalentă cu ecuația $y = x - 1$. Înlocuind în ecuația a doua pe y obținem că (S_2) este echivalent cu

$$(S_2') \begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - x(x - 1) - (x - 1)^2 + x - 3 = 0. \end{cases}$$

Ecuația a doua a sistemului (S_2'), după efectuarea calculelor, se reduce la ecuația de gradul al doilea $x^2 - 4x + 4 = 0$, care are o rădăcină dublă $x_1 = x_2 = 2$. Din $y = x - 1$ obținem $y_1 = y_2 = 1$.

Deci perechea (2, 1) este o soluție dublă a sistemului (S_2).

3) Să se rezolve sistemul

$$(S_3) \begin{cases} y - 1 - x = 0; \\ y = -x^2 + 14x - 50. \end{cases}$$

Sistemul (S_3) este echivalent cu sistemul

$$(S_3') \begin{cases} y = 1 + x, \\ 1 + x = -x^2 + 14x - 50. \end{cases}$$

Ecuaţia a doua a sistemului (S_3') se reduce la ecuaţia de gradul al doilea $x^2 - 13x + 51 = 0$. Cum $\Delta = b^2 - 4ac = 169 - 204 = -35 < 0$, atunci sistemul (S_3') nu are nici o soluţie reală.

Interpretarea geometrică a rezolvării sistemului de ecuaţii de forma

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = a_1x^2 + b_1x + c_1, \end{cases}$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sînt numere reale date cu $a_1 \neq 0$.

Să notăm cu A mulţimea soluţiilor ecuaţiei $ax + by + c = 0$, iar cu B mulţimea soluţiilor ecuaţiei $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$. Mulţimea A reprezintă în planul de coordonate xOy o dreaptă. Mai precis, dacă $b \neq 0$, atunci A reprezintă graficul funcţiei de gradul întîi: $f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$. Dacă $b = 0$, atunci ecuaţia $ax + by + c = 0$ este echivalentă cu ecuaţia $x = -\frac{c}{a}$. În acest caz A reprezintă dreapta paralelă cu axa $y'y$, care trece prin punctul de coordonate $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Mulţimea B reprezintă în planul xOy graficul funcţiei $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, care este o parabolă.

Cum mulţimea soluţiilor sistemului (S) este egală cu $A \cap B$, atunci soluţiile sistemului (S) reprezintă în planul xOy punctele de intersecţie ale dreptei A cu parabola B.

Discuţie. 1) Sistemul (S) are două soluţii distincte dacă dreapta A intersectează parabola B în două puncte distincte.

2) Sistemul (S) are o singură soluţie dacă dreapta A intersectează parabola B într-un singur punct. Trebuie să observăm că în cazul cînd $b = 0$, dreapta A intersectează întotdeauna parabola B într-un singur punct.

3) Sistemul (S) nu are nici o soluţie dacă dreapta A nu intersectează parabola B.

Cele trei situaţii discutate sînt reprezentate în figura IV.22.

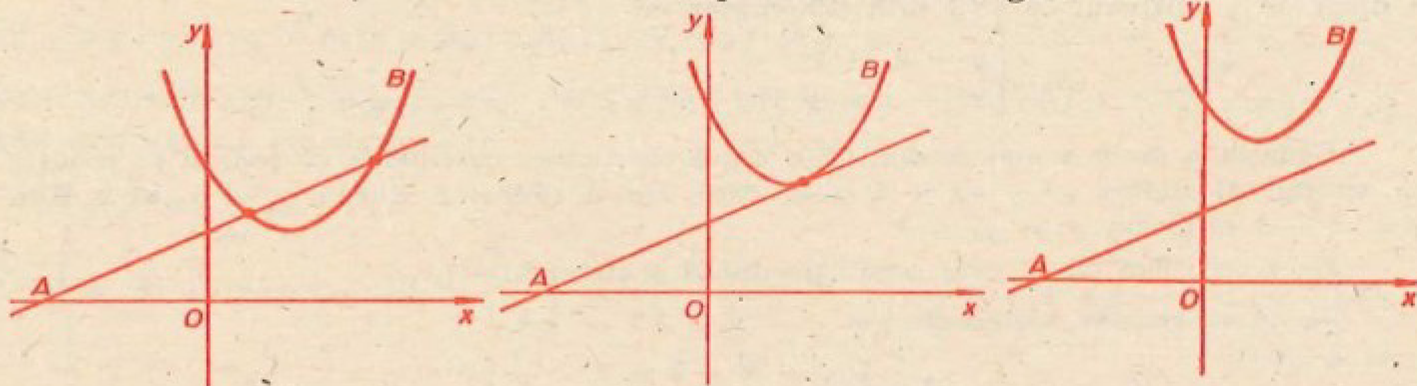


Fig. IV.22

Exemplu. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_1) \begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

Din ecuația $2x + y - 4 = 0$ obținem $y = 4 - 2x$. Înlocuind pe y în ecuația a doua obținem: $4 - 2x = x^2 - 3x + 2$, sau $x^2 - x - 2 = 0$. Această ecuație are rădăcinile $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$. Atunci avem $y_1 = 4 - 2x_1 = 4 + 2 = 6$ și $y_2 = 4 - 2x_2 = 4 - 4 = 0$. Sistemul (S_1) are soluțiile:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 6 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0. \end{cases}$$

Interpretare geometrică. În figura IV.23 dreapta A ce trece prin punctele de coordonate $(0, 4)$ și $(2, 0)$ reprezintă graficul funcției $f(x) = 4 - 2x$, iar parabola B reprezintă graficul funcției $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Dreapta A intersectează parabola B în punctele de coordonate $(-1, 6)$ și $(2, 0)$, care sînt soluțiile sistemului (S_1).

2) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_2) \begin{cases} x - y - 5 = 0, \\ y = x^2 - 3x - 1. \end{cases}$$

Din $x - y - 5 = 0$ obținem $y = x - 5$. Înlocuind pe y în cea de-a doua ecuație a sistemului obținem ecuația $x - 5 = x^2 - 3x - 1$, sau $x^2 - 4x + 4 = 0$. Această ecuație are soluția dublă $x = 2$. Atunci $y = x - 5 = 2 - 5 = -3$. Deci sistemul (S_2) are ca soluție dublă perechea $(2, -3)$.

Interpretare geometrică. În figura IV.24 dreapta A reprezintă graficul funcției $f(x) = x - 5$, iar parabola B reprezintă graficul funcției $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Dreapta A intersectează parabola B în punctul de coordonate $(2, -3)$ care reprezintă soluția sistemului (S_2).

3) Să se rezolve sistemul de ecuații

$$(S_3) \begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ y = x^2 - 5x + 4. \end{cases}$$

Din $2x + y + 1 = 0$ obținem $y = -2x - 1$. Înlocuind în ecuația a doua a sistemului (S_3) obținem ecuația de gradul al doilea $x^2 - 3x + 5 = 0$. Cum discriminantul acestei ecuații este $\Delta = b^2 - 4ac = -11 < 0$, rezultă că sistemul (S_3) nu are nici o soluție reală.

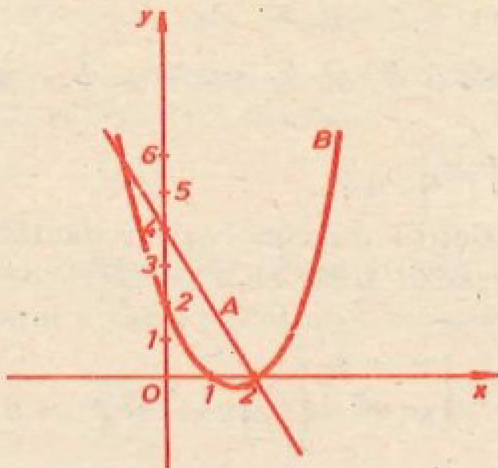


Fig. IV.23

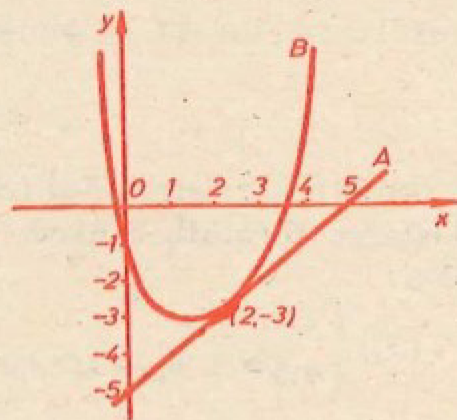


Fig. IV.24

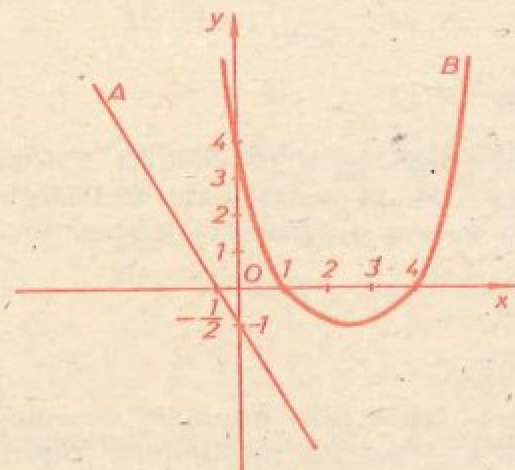


Fig. IV.25

Interpretare geometrică. În figura IV.25 dreapta A este graficul funcției $f(x) = -2x - 1$, iar parabola B este graficul funcției $g(x) = x^2 - 5x + 4$. Dreapta A nu intersectează parabola B în nici un punct.

2. *Sisteme de ecuații omogene*

Un astfel de sistem este de forma:

$$(S) \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases}$$

Sistemul (S) se numește *omogen* deoarece polinoamele $a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2$ și $a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$ sînt omogene în sensul că toate monoamele care apar în scrierea lor au același grad. Presupunem mai întîi că $d_1 \neq 0$ și $d_2 \neq 0$. Există în acest caz numerele reale α și β diferite de zero astfel încît $\alpha d_1 + \beta d_2 = 0$ $\left(\text{de exemplu } \alpha = 1 \text{ și } \beta = -\frac{d_1}{d_2}\right)$. Se înmulțește prima ecuație cu α și cea de-a doua cu β și apoi se adună. Se obține sistemul echivalent:

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ (\alpha a_1 + \beta a_2)x^2 + (\alpha b_1 + \beta b_2)xy + (\alpha c_1 + \beta c_2)y^2 = 0. \end{cases}$$

Notăm coeficienții ecuației a doua din (S') cu a_3, b_3, c_3, atunci

$$(S') \begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_3x^2 + b_3xy + c_3y^2 = 0. \end{cases}$$

Deoarece $d_1 \neq 0$ sistemul (S') nu are soluția $x = 0$ și $y = 0$. Putem presupune că $x \neq 0$. Atunci, în ecuația a doua din (S') împărțim cu x^2 și obținem ecuația de gradul al doilea în $\frac{y}{x}$:

$$c_3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_3\frac{y}{x} + a_3 = 0$$

care, rezolvată, ne dă în general două valori k_1 și k_2 pentru $\frac{y}{x}$, adică:

$$\frac{y}{x} = k_1; \quad \frac{y}{x} = k_2.$$

Acum, rezolvarea sistemului (S) este echivalentă cu rezolvarea următoarelor două sisteme formate dintr-o ecuație de gradul întîi și o ecuație de gradul al doilea:

$$(S_1) \begin{cases} y = k_1x, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \end{cases}; \quad (S_2) \begin{cases} y = k_2x, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1. \end{cases}$$

Cînd $d_1 = 0$ sau $d_2 = 0$, sistemul (S) este de forma (S') și rezolvarea se continuă ca pentru sistemul (S').

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$(S_1) \begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = -2, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu $+2$ şi adunînd-o pe a doua, obţinem sistemul echivalent

$$(S_1) \begin{cases} 2x^2 + 7xy + 3y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Prima ecuaţie o împărţim cu x^2 şi obţinem ecuaţia de gradul al doilea $3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 7\frac{y}{x} + 2 = 0$, care, rezolvată, ne dă rădăcinile $\frac{y}{x} = -2$ şi $\frac{y}{x} = -\frac{1}{3}$. Rezolvarea sistemului (S_1) se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} y = -2x, \\ xy + y^2 = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x, \\ xy + y^2 = 4. \end{cases}$$

Din primul sistem obţinem soluţiile:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Cel de-al doilea sistem nu are soluţii reale.

2) Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$(S_2) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Dacă $x = 0$, atunci din prima ecuaţie, rezultă $y = 0$. Presupunem $x \neq 0$. Atunci împărţim prima ecuaţie cu x^2 şi obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0, \text{ care are rădăcinile: } \frac{y}{x} = -1; \quad \frac{y}{x} = -2.$$

Dacă împărţim ecuaţia a doua a sistemului cu x^2 obţinem ecuaţia

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} = 0, \text{ care are rădăcinile: } \frac{y}{x} = 0; \quad \frac{y}{x} = -1.$$

Rădăcina $\frac{y}{x} = -1$ este comună şi deci perechea $(a, -a)$ unde $a \in \mathbf{R}$, este soluţie a sistemului (S_2). Deci sistemul are o infinitate de soluţii.

3) Să se rezolve sistemul

$$(S_3) \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 = 0. \end{cases}$$

Dacă $x = 0$, atunci din prima ecuaţie trebuie ca $y = 0$. Presupunem $x \neq 0$. Împărţim cu x^2 ecuaţia a doua şi obţinem ecuaţia în $\frac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0, \text{ care nu are nici o soluţie reală.}$$

Rezultă că sistemul (S_2) are ca singură soluţie perechea $(0, 0)$

3. *Sisteme cu ecuații simetrice*

O ecuație în două necunoscute se zice *simetrică* dacă înlocuind x cu y și y cu x, ecuația nu se schimbă.

Exemple. 1) Ecuația $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 10 = 0$ este simetrică. Într-adevăr, înlocuind x cu y și y cu x obținem ecuația $2y^2 - 3xy + 2x^2 - 10 = 0$, care este identică cu cea inițială.

2) Ecuația $x - y + 5 = 0$ nu este simetrică.

Un sistem de ecuații format din ecuații simetrice se numește *simetric*. Deoarece ecuațiile unui sistem simetric nu se schimbă dacă înlocuim pe x cu y și y cu x, rezultă că dacă $x = a$, $y = b$ este o soluție a sistemului de ecuații, atunci și $x = b$, $y = a$ este soluție a aceluiași sistem de ecuații.

Rezolvarea sistemelor de ecuații simetrice se face astfel: se introduc necunoscutele auxiliare s și p date de relațiile:

$$x + y = s \quad \text{și} \quad xy = p.$$

Prin introducerea acestor noi necunoscute s și p, în foarte multe cazuri sistemul simetric se reduce la un sistem de ecuații format dintr-o ecuație de gradul întîi și o ecuație de gradul al doilea în necunoscutele s și p. Pentru a face aceste substituții se va ține seama de identitățile:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2p,$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = s^3 - 3sp,$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2.$$

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul

$$(S) \quad \begin{cases} xy + x + y = 4, \\ xy - 2(x^2 + y^2) = 23. \end{cases}$$

Sistemul (S) este simetric. Făcînd substituțiile $x + y = s$ și $xy = p$ obținem sistemul:

$$(S') \quad \begin{cases} s + p = 4, \\ -2s^2 + 5p = 23. \end{cases}$$

Înlocuind pe $p = 4 - s$ în ecuația a doua, obținem ecuația

$2s^2 + 5s + 3 = 0$, care are soluțiile: $s_1 = -1$; $s_2 = -\frac{3}{2}$.

Atunci $p_1 = 4 - s_1 = 5$ și $p_2 = 4 - s_2 = \frac{11}{2}$. Deci, rezolvarea sistemului (S) se reduce la rezolvarea sistemelor:

$$\begin{cases} x + y = -1, \\ xy = 5 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{3}{2}, \\ xy = \frac{11}{2}, \end{cases}$$

care nu au nici o soluție reală. Rezultă că sistemul (S) nu are nici o soluție.

2) Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$(S)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Făcînd substituţiile $x + y = s$ şi $xy = p$ obţinem sistemul:

$$(S') = \begin{cases} s^2 - 2p = 5, \\ p = 2, \end{cases} \text{ care are soluţiile: } \begin{cases} s_1 = 3 \\ p_1 = 2 \end{cases}; \begin{cases} s_2 = -3 \\ p_2 = 2. \end{cases}$$

Pentru $s_1 = 3$ şi $p_1 = 2$ obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2, \end{cases} \text{ care, rezolvat, ne dă soluţiile: } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Pentru $s_2 = -3$ şi $p_2 = 2$ obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + y = -3, \\ xy = 2, \end{cases} \text{ care, rezolvat, ne dă soluţiile: } \begin{cases} x_3 = -2, \\ y_3 = -1 \end{cases}; \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = -2. \end{cases}$$

Deci sistemul (S) are patru soluţii.

EXERCIŢII

Funcţia de gradul al doilea

1. Fie $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ şi $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ două funcţii de gradul al doilea. Să se arate că $f = g \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ şi $c_1 = c_2$.

2. Să se aducă la forma canonică următoarele funcţii de gradul al doilea:

a) $f(x) = x^2 - x + 11$;
b) $f(x) = -2x^2 - 7x + 1$;
c) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
d) $f(x) = 0{,}51x^2 - 0{,}1x + 1$;
e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$;
f) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}x + 1$.

3. Să se construiască graficul următoarelor funcţii (folosind metoda prin puncte şi efectuînd una sau două translaţii):

a) $f(x) = -2x^2 + 1$;
b) $f(x) = x^2 - x + 11$;
c) $f(x) = -3x^2 + 8x + 3$;
d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;
e) $f(x) = x^2 + x - 2$;
f) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.

4. Să se stabilească maximul sau minimul următoarelor funcţii:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 10$;
b) $f(x) = -x^2 + 2x - 12$;
c) $f(x) = x^2 - 5$;
d) $f(x) = -12x^2 + 31x - 1$;
e) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$;
f) $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}7x - 0{,}31$.

5. Să se stabilească intervalele de monotonie pentru următoarele funcţii de gradul al doilea:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$;
b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$;
c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 7x$;
d) $f(x) = -0{,}3x^2 + x - 0{,}5$.

6. Să se stabilească semnul următoarelor funcţiilor:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;
b) $f(x) = 0{,}3x^2 - x + 0{,}1$;
c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 7x$;
d) $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

7. Să se facă tabelul de variație și apoi să se traseze graficul la următoarele funcții:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$;

c) $f(x) = x^2 - 2x - 4$; d) $f(x) = x^2 - 0,5x$;

e) $f(x) = x^2 - x + 10$; f) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

8. Să se arate că orice funcție de gradul al doilea nu este nici injectivă și nici surjectivă.

9. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, astfel încît graficul acestei funcții să treacă prin punctele $A(1, -8)$, $B(-1, -10)$ și să taie axa $y'y$ în punctul $C(0, -10)$.

10. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$ astfel încît graficul acestei funcții să aibă vîrful în punctul $V(1, 2)$ și să taie axa $y'y$ în punctul $B(0, -3)$.

11. Fie familia de funcții de gradul al doilea $f_m(x) = x^2 - 2(m - 1)x + m - 2$, unde m este parametru real.
Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcții se găsesc pe o parabolă.

12. Să se determine funcția de gradul al doilea $f(x) = ax^2 + bx + c$, știind că admite un minim egal cu 9 și graficul funcției trece prin punctele $A(-1, 13)$ și $B(2, 10)$.

Inecuații de gradul al doilea. Sisteme de inecuații de gradul al doilea

13. Să se rezolve inecuațiile:

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$; b) $x^2 - 3x + 4 \geqslant 3x + 2$;

c) $2x^2 - 2x < -\frac{1}{2}$; d) $-x^2 - 3x + 5 < x^2 - 1$;

e) $x^2 + x + 7 \leqslant 0$; f) $-x^2 + 2x > x + \frac{1}{4}$;

g) $\frac{x+1}{x+2} \geqslant \frac{2x-1}{x-2}$; h) $\frac{x-1}{x^2 - 3x + 2} > 2$;

i) $|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|$; j) $\left|\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4}\right| \leqslant 1$;

k) $\frac{x^2 - 6x - 16}{-x^2 + 8x - 12} > 0$; l) $-1 < \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \leqslant 2$.

14. Pentru ce valori reale ale lui m următoarea inecuație este verificată pentru orice $x \in \mathbf{R}$

$$(m - 1)x^2 - (m + 1)x + (m + 1) > 0.$$

15. Să se determine valorile lui m așa încît inecuația

$$mx^2 + (m - 1)x - (m - 2) > 0$$

să nu aibă nici o soluție.

16. Să se determine valorile lui m astfel încît ecuația

$$(m - 3)x^2 - 2(3m - 4)x + 7m - 6 = 0$$

să aibă rădăcini reale.

17. Fie fracția $E = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 2}{x^2 + x + m}$. Să se determine m astel încît fracția E să aibă sens și să fie pozitivă pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

(x-1)(1-2x)

18. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x > -2, \\ x^2 + x \leqslant 12; \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2 - x < -6, \\ 2x^2 - 1 \leqslant \dfrac{17}{3}x; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 1 > x - 5, \\ x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 3x - 4 \geqslant 0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} (x-1)(x-3) \geqslant (x-1)(x+2), \\ (x-2)(x-3) \leqslant (x+2)(x+3), \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{-3x^2 - 2x - 7} < 0, \\ x^2 \leqslant 16; \end{cases}$

f) $\begin{cases} |x^2 - 4x + 3| + x - 2 > 0, \\ x^2 \leqslant 25. \end{cases}$

19. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2, \text{ unde } m \in \mathbf{R} \setminus \{0\}. \qquad (1)$$

a) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe dreapta $y = x + 1$.

b) Fie A, B punctele de intersecţie ale unei parabole oarecare cu $x'x$ şi F proiecţia vîrfului V al parabolei pe $x'x$. Să se arate că oricare ar fi m, $AB = 2\ FV$.

c) Să se arate că toate parabolele definite prin (1) trec printr-un punct fix.

20. Dacă $f: A \to B$ este o funcţie oarecare, vom numi *imaginea* ei mulţimea notată $\mathrm{Im}\, f$ şi definită astfel

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$

Să se determine $\mathrm{Im}\, f$ pentru următoarele funcţii:

a) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x - 1|$, b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$, c) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1}$, d) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2}$, e) $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x + 1}$, f) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

Sisteme de ecuaţii. Aplicaţii practice

21. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^2 - xy - y = 5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 5y = -64, \\ x - y = -7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 7; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 - 6y = -4, \\ 2x + y = 3; \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + 1}{x - y} = 3, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - xy + 1}{x + y} = x - y, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

22. Să se rezolve sistemele omogene:

a) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ x^2 + xy = 6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy - 19y^2 = 25, \\ x^2 - 6y^2 = 250; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2y^2 - 3x^2 = -19, \\ xy = -6; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x^2 - 6xy + 12y^2 = 108, \\ x^2 - \frac{5}{6}xy + \frac{7}{3}y^2 = 18; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 5, \\ x^2 - xy - y^2 = -2. \end{cases}$

23. Să se rezolve sistemele de ecuații simetrice:

a) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy + y + x = 11, \\ x^2y + y^2x = 30; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43; \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ xy - 3(x + y) = -9. \end{cases}$

24. Fie O un cerc avînd diametrul $AB = 2a$. Pe acest diametru considerăm un punct variabil M. Construim două cercuri O_1 și O_2 avînd segmentele $[AM]$ și $[BM]$ ca diametre. Să se determine punctul M astfel încît aria cuprinsă între cele trei cercuri să fie maximă.

25. Fie ABC un triunghi dreptunghic în vîrful A, avînd catetele $AB = a$ și $AC = b$. Se înscrie în acest triunghi un dreptunghi $MNPQ$ avînd vîrfurile P și Q pe ipotenuza triunghiului, M pe (AB) și N pe (AC). Să se determine laturile acestui dreptunghi astfel încît aria sa să fie maximă.

26. Un călător merge cu automobilul pe o șosea rectilinie AB din orașul A pînă într-un punct C, de unde pleacă mai departe pe jos peste cîmp într-un sat D. Se știe că viteza automobilului este v_1 km/h, iar pe jos călătorul face v_2 km/h. Cum trebuie ales punctul C astfel ca tot drumul să se facă în timpul minim?

27. Să se găsească maximul ariei unui dreptunghi înscris într-un cerc dat.

28. Să se găsească minimul perimetrului unui trapez isoscel circumscris unui cerc dat.

29. Să se calculeze catetele unui triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza a și înălțimea h. Discuție.

30. Să se calculeze laturile unui triunghi dreptunghic cunoscînd perimetrul $2p$ și înălțimea h. Discuție.

31. Într-un semicerc de rază R să se înscrie un trapez isoscel de perimetru dat $2p$. Discuție.

32. Să se circumscrie unui cerc de rază R un trapez isoscel de arie dată $4R^2$. Discuție.

33. Într-un patrulater $ABCD$ care are unghiurile din vîrfurile din A și C de 90°, se dau laturile $AB = a$, $BC = b$ și aria egală cu k^2. Să se calculeze celelalte două laturi ale patrulaterului. Discuție.

34. Două brigăzi trebuiau să execute o lucrare. La început prima brigadă a întrebuințat pentru lucrare o treime din timpul pe care l-ar fi întrebuințat cealaltă brigadă pentru executarea întregii lucrări; după aceea, a doua brigadă a lucrat o treime din timpul pe care prima brigadă l-ar fi întrebuințat pentru întreaga lucrare. După aceasta s-a constatat că s-a executat $\frac{13}{18}$ din întreaga lucrare. Să se afle în cît timp ar fi terminat lucrul fiecare brigadă în parte, dacă împreună aceste brigăzi pot să-l execute în $3\frac{3}{5}$ ore.

35. Un dreptunghi este înscris într-un cerc cu raza de 50 m. Să se determine laturile sale știind că diferența lor este egală cu 20 m.

CAPITOLUL V
PUTERI ȘI RADICALI

§1. PUTERI

Pe parcursul acestui capitol vom nota cu $\mathbf{N}^*$ mulțimea numerelor naturale nenule: $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

1.1. Puteri cu exponent natural nenul

Fie a un număr real și n un număr natural mai mare sau egal cu 2. Se numește *puterea n a numărului a* produsul a n numere, fiecare număr fiind egal cu a. Acest număr *se notează cu* a^n.
Deci:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ ori}}.$$

În reprezentarea a^n, a se numește *baza* puterii, iar n *exponentul* puterii. *Convenim să punem* $a^1 = a$.

Exemple: 1) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$

1. *Semnul puterii cu exponent natural*

Puterea unui număr real pozitiv cu exponent natural nenul este pozitivă. Puterea unui număr real negativ cu exponent natural par este pozitivă, iar cu exponent natural impar este negativă.

Într-adevăr dacă $a > 0$, atunci a^n fiind produsul a n numere pozitive este pozitiv. Dacă $a < 0$, atunci din regula semnelor rezultă că a^{2n}, care este produsul unui număr par de numere negative, este pozitiv, iar a^{2m+1}, care este produsul unui număr impar de numere negative, este negativ.

De exemplu $(-2)^9$ are semnul $(-)$ iar $(-2)^{12}$ are semnul $(+)$.

2. *Puterea produsului și a cîtului a două numere reale*

Fie a, b, două numere reale și $n \in \mathbf{N}^*$. Atunci

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0).$$

Într-adevăr: $(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\ldots(ab)}_{n \text{ ori}} = (\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n \text{ ori}})\cdot(\underbrace{b\cdot b\ldots b}_{n \text{ ori}}) = a^n b^n$

(am folosit asociativitatea și comutativitatea produsului a două numere reale).

De asemenea: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots\frac{a}{b} = \frac{a\cdot a\ldots a}{b\cdot b\ldots b} = \frac{a^n}{b^n}$.

Observație: În calcule, deseori folosim egalitățile de mai sus sub forma:

$$a^n b^n = (ab)^n \text{ și } \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

De exemplu: $6^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \left(6\cdot\frac{1}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5} = \frac{243}{32}$.

3. *Înmulțirea puterilor care au aceeași bază*

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbf{N}^*$ atunci

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Într-adevăr $a^m \cdot a^n = (\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{m \text{ ori}})\cdot(\underbrace{a\cdot a\ldots a}_{n \text{ ori}}) = \underbrace{a\cdot a\ldots a}_{(m+n) \text{ ori}} = a^{m+n}$.

De exemplu: 1) $2^3\cdot 2^4 = 2^7 = 128$; 2) $(-2)\cdot(-2)^4 = (-2)^5 = -32$.

4. *Ridicarea unei puteri la altă putere*

Dacă a este un număr real și $m, n \in \mathbf{N}^*$, atunci

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Într-adevăr. $(a^m)^n = \underbrace{a^m\cdot a^m\ldots a^m}_{n} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ ori}}} = a^{mn}$.

(Am folosit proprietatea 3.)

De exemplu: $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

5. *Împărțirea a două puteri cu aceeași bază*

Dacă a este un număr real nenul și $m, n \in \mathbf{N}^*$, *astfel încît $m > n$, atunci*

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Într-adevăr, folosind proprietatea 3, avem: $a^{m-n}\cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$, de unde rezultă că $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$.

De exemplu: $\frac{3^{10}}{3^8} = 3^{10-8} = 3^2 = 9$; $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$.

1.2. Funcția putere

Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Definim funcția

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^n.$$

Această funcție se numește *funcția putere de gradul n.*

Observaţii: 1) Funcţia putere este o funcţie numerică.
2) Pentru $n = 1$ se obţine funcţia de gradul întîi $f(x) = x$, iar pentru $n = 2$ se obţine funcţia de gradul al doilea $f(x) = x^2$.

T e o r e m a 1. 1° Dacă n este un număr par, atunci funcţia $f(x) = x^n$ este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

2° Dacă n este un număr impar atunci funcţia $f(x) = x^n$ este strict crescătoare pe R.

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi egalitatea

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Într-adevăr, $(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = a^n + a^{n-1}b + \ldots$

$$\ldots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n.$$

Să demonstrăm acum afirmaţia 1° din teoremă. Presupunem că n este par, adică $n = 2m$. Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Din egalitatea: $x_1^{2m} - x_2^{2m} = (x_1 - x_2)(x_1^{2m-1} + x_1^{2m-2}x_2 + \ldots + x_1x_2^{2m-2} + x_2^{2m-1})$, cum $0 \leqslant x_1 < x_2$, atunci $x_1 - x_2 < 0$ şi $x_1^{2m-1} + x_1^{2m-2}x_2 + \ldots + x_2^{2m-1} > 0$, de unde obţinem $x_1^{2m} - x_2^{2m} < 0$, deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Rezultă că funcţia $f(x) = x^{2m}$ este strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. Presupunem acum că $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ astfel încît $x_1 < x_2$. Cum $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ şi deci $(-x_1)^{2m} > (-x_2)^{2m}$, adică $x_1^{2m} > x_2^{2m}$. Prin urmare $f(x_1) > f(x_2)$, ceea ce ne arată că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2° Presupunem acum că n este impar, adică $n = 2m + 1$ şi fie $x_1 < x_2$.

Dacă $0 \leqslant x_1 < x_2$, la fel ca mai sus avem că $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. Dacă $x_1 < x_2 \leqslant 0$, atunci $(-x_1) > (-x_2) \geqslant 0$ şi deci $(-x_1)^{2m+1} > (-x_2)^{2m+1}$, adică $-x_1^{2m+1} > -x_2^{2m+1}$ şi deci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$.

Dacă $x_1 < 0$ şi $x_2 \geqslant 0$, atunci x_1^{2m+1} este un număr negativ, iar $x_2^{2m+1} \geqslant 0$ şi deci în acest caz avem $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$. În concluzie, din $x_1 < x_2$ se obţine $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, adică $f(x_1) < f(x_2)$, adică funcţia $f(x) = x^{2m+1}$ este strict crescătoare pe R.

D e f i n i ţ i e. O submulţime A a lui R se zice *simetrică* dacă pentru orice $x \in A$ avem şi $-x \in A$.

Exemple. 1) Mulţimile R, R $- \{0\}$, $[-1, 1]$ sînt simetrice.
2) Mulţimile $[0, \infty)$, $[0, 1]$, $[-1, 2]$ nu sînt simetrice.

D e f i n i ţ i e. Fie A o mulţime simetrică şi $f : A \to B$ o funcţie numerică Funcţia f se zice *pară* dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(-x) = f(x)$. Funcţia f se zice *impară* dacă pentru orice $x \in A$ avem $f(-x) = -f(x)$.

T e o r e m a 2. Dacă n este un număr par, funcţia putere $f(x) = x^n$ este o funcţie pară. Dacă n este un număr impar, funcţia putere $f(x) = x^n$ este impară.

Demonstraţie. Dacă $n = 2m$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m} = x^{2m} = f(x)$ şi deci funcţia $f(x) = x^{2m}$ este pară. Dacă $n = 2m + 1$, atunci $f(-x) = (-x)^{2m+1} = -x^{2m+1} = -f(x)$ şi deci funcţia $f(x) = x^{2m+1}$ este impară.

Interpretarea geometrică. Fie $f : A \to B$ o funcție numerică unde mulțimea A este simetrică. Dacă f este o funcție pară, atunci $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției f. Într-adevăr dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct al graficului funcției f, atunci din egalitatea $y_0 = f(x_0) = f(-x_0)$ rezultă că și punctul $M'(-x_0, y_0)$ este un punct al graficului. Dar M' este simetricul lui M față de $y'y$. Dacă f este o funcție impară atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f.
Într-adevăr, dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct al graficului, din egalitatea $y_0 = f(x_0) = -f(-x_0)$ rezultă că și punctul $M'(-x_0, -y_0)$ aparține graficului. Dar M' este simetricul lui M față de originea axelor.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$ pentru $n = 3, 4$

1. *Funcția* $f(x) = x^3$. Trasarea graficului funcției $f(x) = x^3$ se face prin „puncte". Mai exact, funcției $f(x) = x^3$ i se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^3$		-64	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy, punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura V.1 este schițat graficul funcției $f(x) = x^3$.

Graficul acestei funcții se numește *parabolă cubică.*

Parabola cubică are următoarele proprietăți:

1) trece prin originea axelor, care este un centru de simetrie (deoarece $f(x) = x^3$ este funcție impară);

2) ramura din dreapta a graficului se găsește deasupra axei $x'x$, iar ramura din stînga se găsește sub axa $x'x$.

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m+1} (m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^3$.

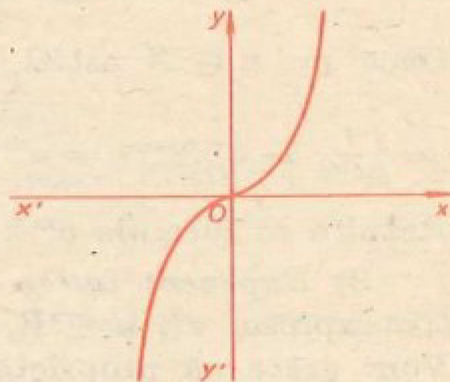


Fig. V.1

2. *Funcția* $f(x) = x^4$. Graficul acestei funcții se trasează tot prin „puncte". Pentru această funcție se asociază următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f(x) = x^4$		256	81	16	1	0	1	16	81	256	

Punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel le reprezentăm într-un sistem rectangular de axe xOy. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă. În figura V.2 este schițat graficul funcției $f(x) = x^4$.

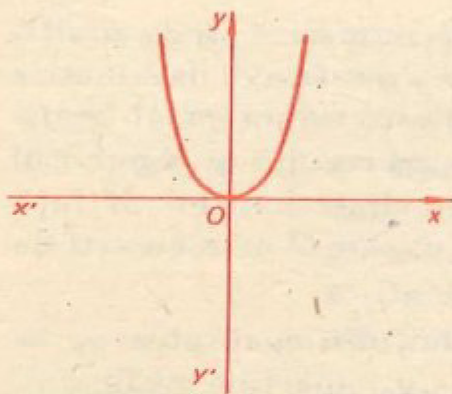


Fig. V.2

Graficul acestei funcții are următoarele proprietăți:

1° Se găsește deasupra axei $x'x$ și trece prin originea axelor.

2° Axa $y'y$ este axă de simetrie pentru graficul funcției $f(x) = x^4$ (deoarece $f(x) = x^4$ este o funcție pară).

Observație. Graficul funcției $f(x) = x^{2m} (m \geqslant 1)$ are o comportare asemănătoare cu graficul funcției $f(x) = x^4$.

1.3. Puterea cu exponent întreg

Am demonstrat că pentru $m > n$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0).$$

Vom căuta să lărgim noțiunea de putere astfel încît formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$ să aibă loc și pentru cazul cînd $m \leqslant n$.

1) *Exponentul* 0. Dacă $a \neq 0$, prin definiție vom pune $a^0 = 1$. Dacă $m = n$, atunci $a^m : a^n = 1$ și $a^{m-n} = a^0 = 1$. Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m = n$.

Observație. Expresia 0^0 nu are nici un sens.

2) *Exponent negativ.* Dacă $n \in \mathbf{N}^*$ și a este un număr real nenul, prin definiție vom pune $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

De exemplu, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; $3^{-1} = \frac{1}{3} = 0{,}(3)$.

Dacă $m, n \in \mathbf{N}$ astfel încît $m < n$, atunci $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+(n-m)}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$.

Rezultă că formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ are loc și pentru cazul $m < n$.

3) *Exponent întreg.* În urma definirii puterilor cu exponent 0 și negativ expresia a^n, $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$ este bine precizată exceptînd cazul $a = 0$. Vom arăta că proprietățile puterilor cu exponent natural se păstrează și pentru exponent întreg:

1° $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 3° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 5° $a^m : a^n = a^{m-n}$.

2° $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; 4° $(a^m)^n = a^{mn}$.

Să verificăm 1°. Pentru exponent $n > 0$ am demonstrat egalitatea 1°. Dacă $n = 0$, atunci $(a \cdot b)^0 = 1$ și $a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1$. Deci

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \text{ are loc și pentru } n = 0.$$

Presupunem $n < 0$. Atunci $(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}}$.

Cum $-n > 0$, atunci $\frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n \cdot b^n$. Deci egalitatea $(ab)^n = a^n b^n$ are loc și pentru $n < 0$.

În același fel se verifică egalitatea 2°.

Să verificăm egalitatea

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \ (a \neq 0). \qquad (1)$$

Deoarece pentru $m > 0$ și $n > 0$ egalitatea (1) este adevărată, rămîne de arătat pentru următoarele trei cazuri:

Cazul $m > 0$ și $n < 0$. Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}}$.

Dar cum $-n > 0$, am văzut că $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m-(-n)} = a^{m+n}$ și deci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Cazul $m < 0$ și $n < 0$. Avem $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}}$.

Cum $-m > 0$ și $-n > 0$, atunci $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

Deci $a^m \cdot a^n = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$.

Cazul cînd unul dintre m sau n este zero. Presupunem că $n = 0$.

Atunci $a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$ și $a^{m+n} = a^{m+0} = a^m$.

Deci și în acest caz avem $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Din egalitatea 3° rezultă și egalitatea $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$.

Să verificăm egalitatea

$$(a^m)^n = a^{mn} \ (a \neq 0). \qquad (2)$$

Deoarece pentru $m > 0$ și $n > 0$ egalitatea (2) este adevărată, rămîne de arătat în următoarele cazuri:

Cazul $m < 0$ și $n > 0$. Avem $(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n = \frac{1}{a^{(-m)n}}$.

Cum $-m > 0$, atunci $(a^{-m})^n = a^{-mn}$. Deoarece $-mn < 0$ atunci $a^{mn} = \frac{1}{a^{-mn}}$ și deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m > 0$ și $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} = \frac{1}{a^{-mn}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul $m < 0$ și $n < 0$. Avem $(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}}$. Din primul caz obținem că $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$ și cum $mn > 0$, atunci $\frac{1}{a^{-nm}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}} = a^{mn}$. Deci $(a^m)^n = a^{mn}$.

Cazul cînd unul dintre m sau n este zero. Dacă $m = 0$, atunci $a^m = 1$ și deci $(a^m)^n = 1^n = 1$. Dar cum $a^{mn} = a^0 = 1$, rezultă $(a^m)^n = a^{mn}$.

Dacă $n = 0$, atunci $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1$ și $a^{mn} = a^0 = 1$. Deci și în acest caz avem $(a^m)^n = a^{mn}$.

Exemple: 1) $3^{-6}\cdot 3^{8} = 3^{-6+8} = 3^2 = 9$;

2) $(4^2)^{-2} = 4^{-4} = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$;

3) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^3 [(-1)^{-2}]^3 = (3^2)^3 = 3^6 = 729.$

1.4. Funcția putere de exponent negativ

Vom studia funcția

$$f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^{-n},\ n \in \mathbf{N}^*.$$

Vom distinge două cazuri: 1) $n = 2m$; 2) $n = 2m + 1$.

1) $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x^{2m}}$.

În § 2 s-a arătat că dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $x_1^{2m} < x_2^{2m}$,

de unde $\frac{1}{x_1^{2m}} > \frac{1}{x_2^{2m}}$ și deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, \infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m} > x_2^{2m}$ și deci $\frac{1}{x_1^{2m}} < \frac{1}{x_2^{2m}}$,

ceea ce ne arată că f este *strict crescătoare pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m} = (-x)^{2m}$, atunci $f(x) = f(-x)$ și deci f *este o funcție pară.*

2) $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \frac{1}{x^{2m+1}}$.

Dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci $0 < x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1}$, de unde $\frac{1}{x_1^{2m+1}} > \frac{1}{x_2^{2m+1}}$ și deci f este *strict descrescătoare pe intervalul* $(0, \infty)$.

Dacă $x_1 < x_2 < 0$, atunci $x_1^{2m+1} < x_2^{2m+1} < 0$ și deci $\frac{1}{x_1^{2m+1}} > \frac{1}{x_2^{2m+1}}$, ceea ce arată că f este *strict descrescătoare și pe intervalul* $(-\infty, 0)$.

Cum $x^{2m+1} = -(-x)^{2m+1}$, atunci $f(x) = -f(-x)$ și deci f este o *funcție impară.*

Observație. Deși funcția f este strict descrescătoare pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ ea nu este strict descrescătoare pe mulțimea $\mathbf{R} - \{0\}$. Într-adevăr dacă $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ atunci $x_1 < x_2$. Dar $f(x_1) = f(-1) = \frac{1}{(-1)^{2m+1}} = -1$ și $f(x_2) = f(1) = 1$ și deci $f(x_1) < f(x_2)$.

Graficul funcției putere $f(x) = x^n$, pentru $n = -1$ și $n = -2$.

Funcția $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^{-1}$.

Trasarea graficului se face prin „puncte". Pentru aceasta asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-1}$		$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10	-100	100	10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	

În acest tabel se vede că pentru valori din ce în ce mai mari ale lui $|x|$, $f(x)$ se „apropie" de zero, iar pentru valori din ce în ce mai mici ale lui $|x|$, $f(x)$ ia valori din ce în ce mai mari (în valoare absolută). Graficul funcţiei $f(x) = x^{-1}$ este schiţat în figura V.3. Acest grafic se numeşte *hiperbolă*. El este constituit din două ramuri simetrice faţă de originea axelor (deoarece funcţia $f(x) = x^{-1}$ este o funcţie impară).

Funcţia $f : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}, f(x) = x^{-2}$.

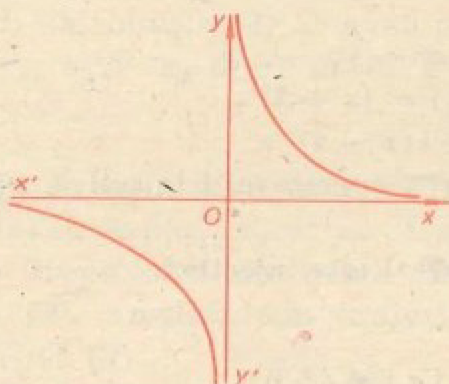


Fig. V.3

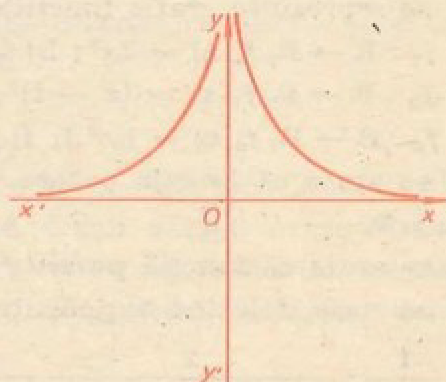


Fig. V.4

Pentru trasarea graficului, acestei funcţii îi asociem următorul tabel de valori:

x	$-\infty$	-100	-10	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	1	2	10	100	$+\infty$
$f(x) = x^{-2}$		$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	1	4	100	$10\,000$	$10\,000$	100	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10\,000}$	

Din acest tabel se vede că pentru valori ale lui x din ce în ce mai apropiate de 0 (pozitive sau negative) funcţia f ia valori din ce în ce mai mari. Pentru valori ale lui $|x|$ din ce în ce mai mari, funcţia f ia valori din ce în ce mai mici.

Graficul funcţiei $f(x) = x^{-2}$ este schiţat în figura V.4.
Acest grafic este constituit din două ramuri simetrice faţă de axa $y'y$ (deoarece funcţia $f(x) = x^{-2}$ este pară) situate deasupra axei $x'x$.

EXERCIŢII

1. Să se calculeze: a) $2^2 \cdot 4^2 \cdot 8^2 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^2$; b) $5^3 \cdot 15^3 \cdot 25^3 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^3$; c) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\right]^2$;

d) $\frac{(-5)^{100}}{(-5)^{103}}$; e) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5 \cdot \left(-\frac{51}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{15}\right)^5$; f) $\left[6 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^0\right]^{-2}$.

2. În raport cu valorile lui „m" să se determine semnul expresiilor:
a) $(1 - m)^{13}$; b) $(2 - 3m)^{125}$; c) $(4 - 2m)^{102}$.

3. Să se calculeze: a) $(x^5y^3)^2 : (x^3y)^3$, $(x, y \neq 0)$; b) $[a^3 + b^3 + 3ab(a + b)]^4 : (a^2 + b^2 + 2ab)^5$, $(a + b \neq 0)$; c) $(10^n - 4^n) : (5^n - 2^n)$.

4. Să se arate că: $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \ldots - ab^{2n-1} + b^{2n})$.

5. Să se arate că: $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16}) = \frac{a^{32} - b^{32}}{a - b}$ $(a \neq b)$.

6. Să se descompună în produs de doi factori:
a) $x^{2m} + x^{m+n} + x^{m-n} + 1 \, (m > n)$; b) $x^m(x^{n-1}) - x^n(x^{m-1})$.

7. Care dintre următoarele numere este mai mare:

a) 4^2 sau 2^6; b) 27^3 sau 9^6; c) 125^2 sau 25^3; d) 4^{300} sau 3^{400}; e) $-\frac{1}{8}$ sau $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$;

f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$ sau $\left(\frac{1}{2}\right)^{500}$; g) 5^{-63} sau 6^{-63}; h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{63}$ sau 5^{-63}?

8. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_1(x) = 2x^3$; b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_2(x) = x^3 - 1$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_3(x) = (x-1)^3$; d) $f_4 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_4(x) = (x+2)^4$;

e) $f_5 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_5(x) = |x^3|$; f) $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_6(x) = |(x-1)^3|$.

9. Să se arate că funcţia putere $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2m}$ nu este nici injectivă, nici surjectivă.

10. Să se arate că funcţia putere $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{2m+1}$ este injectivă.

11. Să se scrie, folosind exponentul negativ

a) $\frac{1}{a^3b^4}$; $\frac{1}{(a+b)^3(a^2-b^2)^2}$; $\frac{3}{a^5b^6c^2}$; $(a, b, c \neq 0 : |a| \neq |b|)$;

b) 0,0002; 0,000003; 0,0015.

12. Să se efectueze: a) $(a^{-2}+1)(a^4 - a^{-2} + 1)$ $(a \neq 0)$;

b) $(a^{-2}+1)^2 - (a^{-2}-1)^2$, $(a \neq 0)$, c) $a(a+b)^{-1} + b(a+b)^{-1}$, $(a + b \neq 0)$.

13. Să se reprezinte grafic funcţiile:

a) $f_1 : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}, f_1(x) = x^{-3} + 1$; b) $f_2 : \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}, f_2(x) = x^{-2} - 1$;

c) $f_3 : \mathbf{R} - \{-1\} \to \mathbf{R}, f_3(x) = \frac{1}{x+1}$; d) $f_4 : \mathbf{R} - \{1\} \to \mathbf{R}, f_4(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

§2. RADICALI

Fie $n \geqslant 2$ un număr natural, iar a un număr real. Să considerăm ecuaţia

$$x^n - a = 0. \quad (1)$$

În continuare ne punem problema existenţei şi a numărului rădăcinilor (soluţiilor) reale ale acestei ecuaţii. Amintim că o *rădăcină reală* a ecuaţiei (1) este un număr real α, astfel încît $\alpha^n - a = 0$.

2.1. Radicalul unui număr pozitiv

1. Fie ca mai sus $n \geqslant 2$ un *număr natural*, $a > 0$ un *număr real pozitiv* şi ecuaţia $x^n - a = 0$. Atunci avem

Teoremă. Ecuaţia

$$x^n - a = 0 \ (n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2; a \in \mathbf{R}, a > 0) \quad (2)$$

are o rădăcină reală pozitivă şi numai una.

Demonstrația riguroasă a faptului că există o rădăcină pozitivă a ecuației (2) depășește programa clasei a IX-a. Ea necesită noțiunea de continuitate și se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Vom indica totuși mai jos pe un exemplu (exemplul 2) cum poate fi găsită o valoare aproximativă a rădăcinii pozitive a unei astfel de ecuații.

Să demonstrăm acum unicitatea. Într-adevăr, să presupunem prin absurd, că ecuația (2) ar avea mai multe rădăcini pozitive diferite. Fie atunci x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2$ două astfel de rădăcini, adică

$$x_1^n = x_2^n = a. \tag{3}$$

Cum $x_1 \neq x_2$, atunci unul dintre aceste numere este mai mic decît celălalt. Fie, de exemplu, $x_1 < x_2$. Dar funcția putere fiind strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (după cum am arătat în § 2) rezultă că $x_1^n < x_2^n$, ceea ce contrazice relația (3). Această contradicție arată că există o singură rădăcină pozitivă a ecuației (2).

Cu alte cuvinte, teorema precedentă spune că *pentru orice număr real pozitiv* $a > 0$ și *orice număr natural* $n \geqslant 2$, *există un unic număr real pozitiv cu proprietatea că puterea a n-a a sa să fie a.*

Atunci putem da următoarea definiție:

Definiție. Dacă $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, se numește *radical de ordin n din a*, **numărul pozitiv a cărui putere a n-a este a.**

Conform teoremei precedente există un astfel de număr și este unic.

Notație: Vom nota radicalul de ordin n din a prin $\sqrt[n]{a}$. Pentru $\sqrt[2]{a}$, de obicei, se omite 2 și se scrie, simplu, $\sqrt{a}$.

Așadar, $\sqrt[n]{a}$ este un număr care verifică relațiile:

$$\sqrt[n]{a} > 0, (\sqrt[n]{a})^n = a \; (a > 0).$$

Exemple: 1) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt[5]{32} = 2$; $\sqrt[4]{81} = 3$.

2) Să arătăm, acum, cum poate fi găsită o valoare aproximativă a numărului $\sqrt[3]{2}$. Deoarece $1 = 1^3 < 2 < 2^3 = 8$, rezultă că $1 < \sqrt[3]{2} < 2$ și deci 1, respectiv 2 sînt valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decît 1. Ca să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decît 0,1 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm în modul următor. Scriem șirul de numere

1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0.

Căutăm în acest șir două numere consecutive, astfel încît cubul primului dintre ele să fie mai mic decît 2, iar cubul celui de-al doilea să fie mai mare decît 2.

Pentru aceasta să ridicăm la cub numărul din mijloc.

Obținem $1{,}5^3 = 3{,}375$, care este mai mare decît 2. Deoarece toate numerele de la dreapta lui 1,5 prin ridicare la cub dau numere mai mari decît 2, perechea de numere căutată va fi printre numerele

1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Ridicăm la cub pe 1,2 și obținem 1,728 care este mai mic decît 2, și deci cubul lui 1,1 va fi și mai mic. Calculăm atunci cubul lui 1,3 și obținem $(1{,}3)^3 = 2{,}197$ care este mai

mare decît 2. Deci $1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3$. Așadar 1,2 respectiv 1,3, vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decît 0,1.

Dacă vrem să găsim valorile aproximative cu o eroare mai mică decît 0,01 ale lui $\sqrt[3]{2}$, procedăm ca mai înainte pentru șirul de numere următor:

$$1,21;\ 1,22;\ 1,23;\ 1,24;\ \ldots;\ 1,29.$$

Deoarece $(1,25)^3 = 1,953125$ este mai mic decît 2, o să luăm în considerare numai numerele:

$$1,26;\ 1,27;\ 1,28;\ 1,29.$$

Cum $(1,26)^3 = 2,00376$ este mai mare decît 2, avem $1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26$. Așadar 1,25 respectiv 1,26 vor fi valorile aproximative prin lipsă, respectiv prin adaos, ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare mai mică decît 0,01.

Continuînd procedeul putem găsi valori aproximative ale lui $\sqrt[3]{2}$, cu o eroare oricît de mică dorim.

În general, ecuația $x^n - a = 0$ $(a > 0)$ poate să aibă și alte rădăcini (care evident trebuie să fie negative). De exemplu, ecuația $x^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2 < 0$ și $x_2 = 2 > 0$. În acest sens avem în general:

1° Dacă $n = 2k + 1$, atunci ecuația $x^{2k+1} - a = 0$ $(a > 0)$ nu are rădăcini negative.

Această afirmație rezultă ușor observînd că oricare ar fi $\alpha < 0$ avem $\alpha^{2k+1} < 0$ și deci $\alpha^{2k+1} \neq a$ $(a > 0)$.

2° Dacă $n = 2k$ atunci ecuația $x^{2k} - a = 0$ $(a > 0)$ are o singură rădăcină negativă și anume $-\sqrt[2k]{a}$.

Într-adevăr, avem $(-\sqrt[2k]{a})^{2k} = (\sqrt[2k]{a})^{2k} = a$ și deci $-\sqrt[2k]{a}$ este o rădăcină a ecuației $x^{2k} - a = 0$. Un raționament analog celui folosit la demonstrarea unicității în teorema precedentă, ne arată că $-\sqrt[2k]{a}$ este unica rădăcină negativă.

Prin definiție, avem $\sqrt[n]{0} = 0$ $(n \geqslant 2$, număr natural).

Evident, $\sqrt[n]{0} = 0$ este unica rădăcină a ecuației $x^n = 0$.

Observație. Avînd în vedere definiția radicalului, mai precis că radicalul unui număr pozitiv (sau nul) este pozitiv (sau nul) este folositor de remarcat următoarea formulă importantă:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0; \\ 0, \text{ dacă } x = 0; \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Cu alte cuvinte, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemple: 1) $\sqrt{(2 - a)^2} = |2 - a| = \begin{cases} 2 - a, \text{ dacă } a < 2; \\ 0, \text{ dacă } a = 2; \\ a - 2, \text{ dacă } a > 2. \end{cases}$

2) $\sqrt{(x^2 + 1)^2} = |x^2 + 1| = x^2 + 1$,

deoarece pentru orice x, avem $x^2 + 1 > 0$.

2. *Funcția radical.* Fie $n \geqslant 2$ un număr natural. În paragraful precedent definind noțiunea de radical de ordin n, fiecărui număr pozitiv (sau nul) a i s-a asociat un număr bine determinat, pozitiv (sau nul) $\sqrt[n]{a}$.

Astfel am obținut o funcție

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt[n]{x}.$$

Această funcție se numește *funcție radical*. Iată cîteva proprietăți ale funcției radical:

1° Funcția radical este *strict crescătoare*.

Într-adevăr fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, astfel încît $x_1 < x_2$. Deoarece $x_1 = (\sqrt[n]{x_1})^n$ și $x_2 = (\sqrt[n]{x_2})^n$, avem $(\sqrt[n]{x_1})^n < (\sqrt[n]{x_2})^n$. Dar funcția putere fiind strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (după cum am văzut în § 1.2) rezultă că $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$ adică $f(x_1) < f(x_2)$.

2° Funcția radical este *bijectivă*.

Deoarece funcția radical este strict crescătoare (proprietatea 1°) rezultă că ea este injectivă. Într-adevăr, fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, astfel încît $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Dacă presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$ și deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. Analog, dacă $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Fie, acum, $y \in [0,\infty)$ atunci $f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y$. Deci f este surjectivă.

Observații. 1) Deoarece funcția radical

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f(x) = \sqrt[n]{x}$$

este bijectivă (proprietatea 2°), rezultă (vezi teorema, § 3.7, din cap. II) că ea este *inversabilă*.

Din relațiile: $\sqrt[n]{x^n} = x$ și $\sqrt[n]{y^n} = y$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ rezultă că inversa sa nu este alta decît funcția

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty);\ g(x) = x^n$$

(a nu se confunda funcția g cu funcția putere, ele neavînd același domeniu de definiție).

Într-adevăr, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[n]{x}) = (\sqrt[n]{x})^n = x,\ x \in [0, \infty)$.

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^n) = \sqrt[n]{y^n} = y,\ \ y \in [0, \infty).$$

2) Din pct. 1) rezultă că g este inversabilă și conform teoremei din § 3.7, cap. II, este deci bijectivă.

3. *Graficul funcției radical* $f(x) = \sqrt[n]{x}$ *pentru* $n = 2, 3$.

1) Funcția $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$. Din proprietățile 1° și 2° de mai sus rezultă, în particular, că funcția f este strict crescătoare și bijectivă. Graficul acestei funcții (construit prin „puncte") este reprezentat în figura V.5.

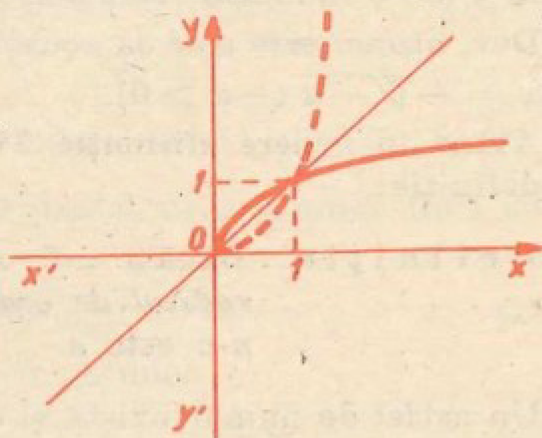


Fig. V.5

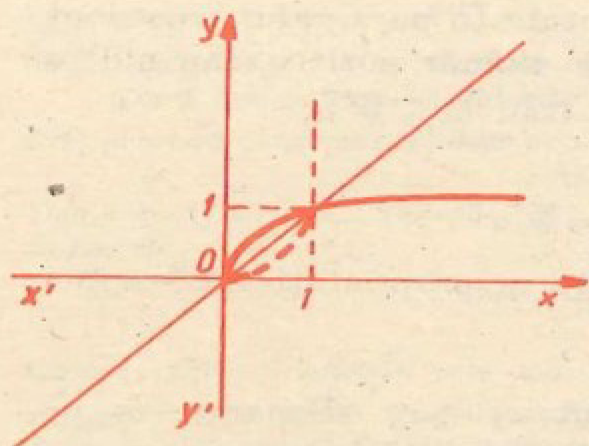


Fig. V.6

2) Funcţia $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. De asemenea, această funcţie este strict crescătoare şi bijectivă. Graficul său (construit prin „puncte") este reprezentat în fig. V.6.

Se observă din aceste figuri că graficele celor două funcţii radical considerate sînt asemănătoare.

În cele două figuri am reprezentat prin linie întreruptă graficul funcţiei inverse. Cele două grafice (al funcţiei f şi al inversei sale g) sînt simetrice faţă de prima bisectoare (vezi § 3.7, cap. II).

2.2. Radicalul (de ordin impar) al unui număr negativ

Fie $n \geqslant 2$ un *număr natural*, $a < 0$ un *număr real negativ* şi *ecuaţia* $x^n - a = 0$. Atunci avem:

Teoremă. Fiind dată ecuaţia:

$$x^n - a = 0 \quad (n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2;\ a \in \mathbf{R},\ a < 0) \tag{1}$$

avem:

1° Dacă $n = 2k$ $(k \geqslant 1)$, ecuaţia (1) nu are rădăcini reale.

2° Dacă $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 1)$, ecuaţia (1) are o rădăcină reală negativă şi numai una.

Demonstraţie. Afirmaţia 1° rezultă uşor observînd că, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$ avem $\alpha^{2k} = (\alpha^2)^k > 0$ şi deci $x^{2k} \neq a$ $(a < 0)$, adică $\alpha^{2k} - a \neq 0$.
Să demonstrăm acum 2°. Fie pentru aceasta $y = -x$. Cum $y^{2k+1} = (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, ecuaţia devine $-y^{2k+1} - a = 0$, sau încă $y^{2k+1} - (-a) = 0$.

Cum $a < 0$ rezultă $-a > 0$ şi după teorema din § 2.1, rezultă că ecuaţia în y are o rădăcină reală pozitivă unică. Aceasta este tocmai $\sqrt[n]{-a}$ $(-a > 0)$. Dar, atunci este clar că ecuaţia în x are o rădăcină negativă unică şi anume $x = -\sqrt[n]{-a}$ $(-a > 0)$.
Avînd în vedere afirmaţia 2° a teoremei precedente putem da următoarea definiţie:

Definiţie. Dacă $a < 0$, $n \in \mathbf{N}$ şi $n \geqslant 3$ este un *număr impar*, se numeşte *radical de ordin n din a*, numărul negativ a cărui putere a *n*-a este *a*.

Un astfel de număr există şi este unic. Îl notăm prin $\sqrt[n]{a}$. Aşadar $\sqrt[n]{a}$ $(a < 0$, $n \geqslant 3$, impar) este un număr care verifică relaţiile: $\sqrt[n]{a} < 0$, $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Din considerațiile anterioare rezultă:

Dacă $a < 0$, $n = 2k + 1$, atunci $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$.

Exemple: 1) Ecuațiile $x^4 + 81 = 0$ și $x^{100} + 125 = 0$ nu au rădăcini reale.

2) Ecuațiile $x^5 + 32 = 0$ și $x^3 + 125 = 0$ au cîte o singură rădăcină reală negativă și anume:

$$\sqrt[5]{-32} = -2, \text{ respectiv } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

Observație. Pentru un număr natural impar, $n = 2k + 1$, am definit radicalul de ordin n din orice număr real a fără a pune condiția ca $a \geqslant 0$. Astfel se obține o funcție

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt[n]{a}.$$

Această funcție este *inversabilă*, inversa sa fiind funcția putere $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^n$.

2.3. Proprietățile radicalilor

În cele ce urmează vom vedea că radicalii au o serie de proprietăți asemănătoare puterilor.

Amintim, la început, că dacă x și y sînt numere reale, iar n un număr natural nenul, atunci $x^n y^n = (xy)^n$.

De asemenea, dacă $x, y \geqslant 0$ sînt numere reale, iar n este un număr natural nenul, atunci din $x^n = y^n$ rezultă $x = y$ (vezi, de exemplu, observația din § 2.1 pct. 2).

În cele ce urmează m, n, k vor fi numere naturale nenule, iar atunci cînd ele indică ordinul unui radical, vor fi mai mari sau egale decît 2.

1. Oricare ar fi numerele reale $a, b \geqslant 0$, atunci

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}. \tag{1}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{ab}$ și $y = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$. Atunci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ și $x^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab$, $y^n = (\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerința $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$ este esențială numai pentru n par.

Dacă n este impar, formula (1) este valabilă pentru orice numere reale a și b (inclusiv negative).

Exemple: $\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25}\sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35;$

$$\sqrt[3]{-125 \cdot 8} = \sqrt[3]{-125}\sqrt[3]{8} = -5 \cdot 2 = -10.$$

Remarcăm că formula (1) rămîne adevărată pentru orice număr finit de numere $a_1, a_2, \dots, a_k \geqslant 0$ $(k \geqslant 2)$, adică

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\dots\sqrt[n]{a_k}. \tag{2}$$

2. Oricare ar fi numerele reale $a \geqslant 0$, $b > 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{3}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $y = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Atunci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ şi $x^n = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}$ şi $y^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Cerinţa $a \geqslant 0$ şi $b > 0$ este esenţială numai pentru n număr par.

Dacă n este impar formula (3) este valabilă pentru orice număr real a şi orice număr real $b \neq 0$.

Exemple: $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; $\sqrt[3]{\frac{-64}{27}} = -\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = -\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{4}{3}$.

3. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = a^m. \tag{4}$$

Într-adevăr,

$$\sqrt[n]{a^{nm}} = \sqrt[n]{(a^n)^m} = \underbrace{\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{a^n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a^n}}_{m \text{ ori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ ori}} = a^m.$$

Exemple: $\sqrt[3]{4^6} = \sqrt[3]{4^{3\cdot 2}} = 4^2 = 16$; $\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^{4\cdot 3}} = 2^3 = 8$.

4. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}. \tag{5}$$

Într-adevăr

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{m \text{ ori}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \ldots \cdot a}_{m \text{ ori}}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Dacă n este impar, formula (4) este valabilă şi pentru $a < 0$.

Exemple: $(\sqrt[4]{3})^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$; $(\sqrt[6]{16})^3 = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$;

$$(\sqrt[3]{-2})^5 = \sqrt[3]{(-2)^5} = \sqrt[3]{-32}.$$

5. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}. \tag{6}$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ şi $y = \sqrt[n]{a^m}$. Atunci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ şi $x^n = (\sqrt[nk]{a^{mk}})^n = \sqrt[nk]{a^{(nk)m}} = a^m$ şi $y^n = (\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$. Deci $x^n = y^n$, de unde $x = y$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple: $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$; $\sqrt[25]{a^{10}} = \sqrt[5]{a^2}$.

6. Oricare ar fi numărul real $a \geqslant 0$, atunci

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}.$$

Într-adevăr, fie $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ și $y = \sqrt[mn]{a}$. Atunci $x \geq 0$ și $y \geq 0$. După proprietățile 4 și 5 avem $y^n = (\sqrt[mn]{a})^n = \sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$. Cum $x^n = \sqrt[m]{a}$, după definiția radicalului de ordin n rezultă că $y = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.
Deci $y = x$, ceea ce trebuia demonstrat.

Exemple: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$.

2.4. Operații cu radicali

1. *Scoaterea unui factor de sub semnul radical și introducerea unui factor sub semnul radical.*

Uneori numărul de sub semnul radical se descompune în factori, pentru care radicalul este ușor de calculat. În aceste cazuri, expresia radicalului devine mai simplă (se simplifică), dacă scoatem acești factori de sub semnul radical. În efectuarea unei astfel de operații, ne bazăm pe proprietățile 1 și 3 ale radicalilor.

De *exemplu:* $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$;

$$\sqrt[4]{1250} = \sqrt[4]{625 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4 \cdot 2} = \sqrt[4]{5^4}\sqrt[4]{2} = 5\sqrt[4]{2};$$

$$\sqrt[4]{2a^{12}} = |a^3|\sqrt[4]{2}.$$

Uneori este folositor să introducem factori sub semnul radical. Pentru efectuarea unei astfel de operații ne bazăm pe aceleași proprietăți menționate mai sus.

De *exemplu:* $\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{16^2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^8 \cdot 2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^9}} = \sqrt[6]{2^9} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$.

2. *Înmulțirea radicalilor.* Proprietatea 1 a radicalilor ne dă legea de înmulțire a radicalilor de același ordin:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}. \quad (1)$$

Ca să înmulțim radicali de ordine diferite, este necesar să-i aducem la același ordin și, apoi, să-i înmulțim după formula (1). Fie, de exemplu, $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[m]{b}$. Folosind proprietatea 5 a radicalilor avem:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}; \ \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{b^n}.$$

Atunci $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m} \cdot \sqrt[nm]{b^n} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$.

De *exemplu:* $\sqrt{3}\sqrt[3]{9} = \sqrt[6]{3^3}\sqrt[6]{9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 9^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3\sqrt[6]{3}$.

Observăm că se poate lua ca ordin comun al radicalilor $\sqrt[n]{a}$ și $\sqrt[m]{b}$, tocmai cel mai mic multiplu comun al numerelor n și m.

De exemplu, putem lua ca ordin comun pentru radicalii $\sqrt[4]{2}$ și $\sqrt[6]{32}$ pe 12, care este cel mai mic multiplu comun al numerelor 4 și 6. Atunci avem:

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{32} = \sqrt[12]{2^3} \cdot \sqrt[12]{2^{10}} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2\sqrt[12]{2}.$$

3. *Împărțirea radicalilor.* Proprietatea 2 a radicalilor ne dă legea de împărțire a radicalilor de același ordin:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}. \tag{2}$$

Ca să împărțim radicali de ordine diferite, îi aducem mai întîi la același ordin și apoi îi împărțim după formula (2).

De *exemplu:* $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}.$

4. *Raționalizarea numitorilor.* Înțelegem prin raționalizarea numitorilor, operația de eliminare (prin transformări) a radicalilor de la numitorul unei fracții. Vom clarifica aceasta prin cîteva cazuri speciale, pe care le vom prezenta mai jos.

Să precizăm mai întîi noțiunea de *expresie conjugată.* Astfel, o expresie care conține radicali se numește *conjugata* unei alte expresii care conține radicali, dacă produsul acestor expresii se poate scrie fără radicali. Atunci cele două expresii se numesc *conjugate.*

În cazurile următoare, raționalizarea numitorului se realizează prin amplificarea fracției cu conjugata numitorului. De aceea vom pune în evidență, pentru fiecare caz în parte, conjugatele numitorului.

1° *Numitorul este un radical.* În acest caz radicalul de la numitor se elimină printr-o amplificare.

De *exemplu:* $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{5}{\sqrt[3]{12}} = \frac{5\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3}} = \frac{5\sqrt[3]{18}}{6}.$

2° *Numitorul este de forma:* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ $(a, b > 0)$.
Observăm că $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$. Expresiile $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sînt conjugate. Pentru a raționaliza numitorul amplificăm fracția cu conjugata numitorului.

De *exemplu:*

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

3° *Numitorul este de forma* $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c}$ $(a, b, c > 0)$. În acest caz, radicalii de la numitor se elimină succesiv, reducînd problema la cazul precedent.

De *exemplu:*

$$\frac{4}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{4[(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}]}{[(1+\sqrt{3})-\sqrt{2}][(1+\sqrt{3})+\sqrt{2}]}=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(4+2\sqrt{3})-2}=\frac{4(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2+2\sqrt{3}}=\frac{2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})}{1+\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2(1+\sqrt{3}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{2(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-3+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{1-3}=$$

$$=2-\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$

4° *Numitorul este de forma* $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ sau $\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$. Avem:

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a+b \text{ și}$$

$$(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=a-b$$

acestea fiind perechi de expresii conjugate.

Exemplu: $$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^3})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2})}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3\cdot 5^2}+\sqrt[3]{3^2\cdot 5}+\sqrt[3]{3^3}}{5-3}=\frac{3+\sqrt[3]{45}+\sqrt[3]{75}}{2}.$$

Cazul 4° se poate da mai general, astfel:

5° *Numitorul este de forma* $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}$.

Avem $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a-b$
acestea fiind deci expresii conjugate.

6° *Numitorul este de forma* $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ sau $\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots$ $\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}}$, unde $n=2k+1$, este impar. Avem:

$(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b})(\sqrt[n]{a^{n-1}}-\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots-\sqrt[n]{ab^{n-2}}+\sqrt[n]{b^{n-1}})=a+b, (n=2k+1)$
acestea fiind deci conjugate.

2.5. Ecuații iraționale

1. Se numesc *ecuații iraționale*, ecuațiile care conțin necunoscuta sub semnul radical. Așa, de exemplu, ecuațiile

$$\sqrt{x-2}=5+\sqrt{x};\ \sqrt{x}=1-2x;$$

$$\sqrt[3]{4-x}=\sqrt[4]{x+10}+5x;\ \text{ș.a.}$$

Amintim că radicalii de ordin par sînt definiţi numai pentru numere nenegative, aceştia fiind de asemenea numere nenegative. Să considerăm, de exemplu, ecuaţiile iraţionale:

1° $\sqrt{x-3} + \sqrt{2-x} = 3$. Cum radicalii de ordinul doi sînt definiţi numai pentru numere nenegative, rezultă că soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice sistemul de inecuaţii:

$$x - 3 \geqslant 0;\ 2 - x \geqslant 0. \qquad (1)$$

De aici rezultă: $x \geqslant 3$ şi $x \leqslant 2$ şi deci sistemul (1) evident nu are soluţii. Aşadar, ecuaţia dată nu are soluţii reale.

2° $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} = -5$. Cum $\sqrt{x}$ şi $\sqrt{3-x}$ sînt nenegative, avem $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} \geqslant 0$ pentru x real. Însă $-5 < 0$ şi deci ecuaţia nu are soluţii reale.

Observaţie. Cele două exemple precedente ne arată că este necesar ca înainte de a trece la găsirea, prin diferite metode, a soluţiilor unei ecuaţii iraţionale, să ne asigurăm dacă astfel de soluţii pot să existe.

2. *Metode de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale.* Calea obişnuită de *rezolvare* a ecuaţiilor iraţionale constă în eliminarea radicalilor, prin diferite transformări, reducîndu-le astfel la ecuaţii deja studiate (de exemplu, de gradul întîi sau al doilea). Mai jos prezentăm cîteva exemple de ecuaţii iraţionale a căror rezolvare se poate efectua prin ridicarea la putere sau înmulţire cu expresii conjugate.

Exemplul 1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x = \sqrt{2-x}. \qquad (2)$$

Pentru ca radicalul să existe trebuie ca $2 - x \geqslant 0$, de unde $x \leqslant 2$. Deci soluţiile ecuaţiei trebuie să verifice această inegalitate. Ridicăm acum ambii membri ai ecuaţiei la pătrat şi obţinem: $x^2 = 2 - x$ sau $x^2 + x - 2 = 0$, de unde $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$.

Cu toate că $x_1 \leqslant 2$ şi $x_2 \leqslant 2$, nu putem trage încă concluzia că acestea sînt rădăcini ale ecuaţiei (2).

Aceasta pentru că la acelaşi rezultat am fi ajuns (prin ridicare la pătrat, membru cu membru) chiar dacă am fi considerat ecuaţia iraţională $x = -\sqrt{2-x}$, care evident este diferită de ecuaţia dată (2). Deci printre rădăcinile ecuaţiei obţinute prin ridicare la pătrat (membru cu membru) a ecuaţiei (2) se găsesc şi rădăcinile ecuaţiei $x = -\sqrt{2-x}$, care pot să nu fie rădăcini ale ecuaţiei (2). De aceea, trebuie să verificăm dacă, într-adevăr, $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$ sînt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Pentru $x = -2$, membrul stîng al ecuaţiei (2) are valoarea -2, iar cel drept $\sqrt{4} = 2$. Cum $-2 \neq 2$, rezultă că -2 nu este rădăcină a ecuaţiei (2). Pentru $x = 1$, ambii membri ai ecuaţiei (2) iau valoarea 1. Deci 1 este rădăcină a ecuaţiei iraţionale date.

Exemplul 2. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3. \qquad (3)$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă că soluţiile ecuaţiei verifică inegalitatea $5 \leqslant x \leqslant 10$. Prin ridicare la pătrat se obţine:

$$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(10-x)} + 10 - x = 9, \text{ sau}$$
$$2\sqrt{(x-5)(10-x)} = 4, \text{ sau } \sqrt{(x-5)(10-x)} = 2$$

Printr-o nouă ridicare la pătrat se obţine:

$(x-5)(10-x)=4$ sau $-x^2+15x-50=4$ sau $x^2-15x+54=0$.

Această ecuaţie are rădăcinile: $x_1=6$, $x_2=9$, deci cuprinse între 5 şi 10. Verificarea arată că atît 6 cît şi 9 sînt rădăcini ale ecuaţiei date.

Exemplul 3. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4. \tag{4}$$

Din condiţiile de existenţă a radicalilor rezultă $x \geqslant 1$.

Să rezolvăm această ecuaţie prin înmulţirea ambilor membri cu expresia conjugată a membrului stîng, adică cu $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}$. Astfel obţinem:

$(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1})=4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1})$, de unde

$$(x+7)-(x-1)=4(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}).$$

De aici, avem $\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$. (5)

Adunînd membru cu membru ecuaţiile (4) şi (5) se obţine $2\sqrt{x+7}=6$, de unde $x+7=9$, adică $x=2$. Prin verificare, se obţine că 2 este o rădăcină a ecuaţiei date.

Observaţie. Prin metodele de rezolvare a ecuaţiilor iraţionale, indicate în exemplele de mai sus, nu se pot pierde rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date. Dimpotrivă, ecuaţia (fără radicali) la care se ajunge prin transformări ale ecuaţiei iraţionale date, poate avea şi alte rădăcini. De aceea remarcăm din nou necesitatea de a verifica dacă rădăcinile ecuaţiei obţinute (prin transformări) sînt rădăcini ale ecuaţiei iraţionale date (în forma iniţială) această etapă făcînd parte din însăşi rezolvarea ecuaţiilor iraţionale.

2.6. Puteri cu exponent raţional

În acest paragraf vom prezenta o extindere a noţiunii de putere, care cuprinde în particular, atît noţiunea de putere cu exponent întreg, cît şi cea de radical.

1. *Puteri cu exponent raţional pozitiv*

Definiţie. Fie $a \geqslant 0$ un *număr real nenegativ* şi $\frac{m}{n}$ un *număr raţional pozitiv*, atunci definim

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

$\left(\text{citim } a \text{ la puterea } \frac{m}{n}\right)$.

Observăm că în această definiţie intervin numerele naturale m şi n care definesc numărul raţional dat.

Cum numărul raţional $\frac{m}{n}>0$ este egal, de exemplu, cu numărul raţional $\frac{km}{kn}$, pentru k număr natural nenul, se pune în mod firesc problema de a arăta că această definiţie este corectă, adică nu depinde de alegerea reprezentanţilor.

Cu alte cuvinte, trebuie arătat că dacă $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, atunci $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$.

Într-adevăr, avem $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ dacă şi numai dacă $mn' = m'n$.

Atunci folosind proprietatea 5 a radicalilor, avem

$$a^{\frac{m'}{n'}} = \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'm]{a^{mm'}} = \sqrt[m'n]{a^{m'm}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Obţinem astfel noţiunea de *putere cu exponent raţional pozitiv*.

De *exemplu:*

$$9^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{9^5} = \sqrt[4]{9^4 \cdot 9} = 9\sqrt[4]{9} = 9\sqrt{3};\ 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

Din noţiunea de putere cu exponent raţional pozitiv, particularizată la numerele naturale n, respectiv la numerele raţionale pozitive $\frac{1}{n}$, se obţine noţiunea de putere cu exponent natural, respectiv noţiunea de radical, pentru numerele pozitive.

Observaţie. Cerinţa $a \geqslant 0$, din definiţie, este esenţială deoarece, în caz contrar, formula (1) ar putea să nu aibă sens. De exemplu, $(-2)^{\frac{1}{4}}$ după formula (1) ar trebui să fie radical de ordinul 4 din -2, care nu are sens.

Proprietăţi ale puterilor cu exponent raţional pozitiv

În cele ce urmează presupunem că $\frac{m}{n}$ şi $\frac{p}{q}$ sînt numere raţionale pozitive. Atunci:

1° $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ $(a \geqslant 0)$;

2° $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ $(a, b \geqslant 0)$;

3° $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ $(a \geqslant 0, b > 0)$;

4° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ $(a \geqslant 0)$;

5° Dacă $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, atunci $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$ $(a > 0)$.

Aceste proprietăţi se demonstrează uşor folosind proprietăţile radicalilor. Să demonstrăm prima proprietate. Avem

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Lăsăm ca exercițiu, verificarea celorlalte proprietăți.

Observație. Proprietatea 1° este adevărată și pentru un număr finit de factori, adică:

$$a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{m_k}{n_k}} = a^{\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_k}{n_k}}.$$

Exemple: $5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{4}{5}} = 5^{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 5^1 = 5;$

$$a^{\frac{6}{7}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{6}{7} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{71}{42}} \ (a \geqslant 0).$$

Pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$. Expresiei 0^0 nu i se dă nici un sens.

2. *Puteri cu exponent rațional negativ.* Așa cum am definit puterea cu exponent întreg negativ (vezi § 1.3), definim și *puterea cu exponent rațional negativ.*

Fie $a > 0$, un număr real pozitiv și $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv. Atunci prin definiție,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

De *exemplu:*

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{4}; \ 27^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{27^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{27^5}} = \frac{1}{\sqrt[6]{3^{15}}} = \frac{1}{\sqrt{3^5}} = \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

Acum știm ce înseamnă puterea cu exponent rațional oarecare a oricărui număr real pozitiv. Puterile cu exponent rațional oarecare au următoarele proprietăți de bază:

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ $(a > 0)$;

2) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$ $(a, b > 0)$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ $(a, b > 0)$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$ $(a > 0)$;

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$ $(a > 0)$.

Am demonstrat în paragraful precedent aceste proprietăți pentru cazul exponenților raționali pozitivi. Ele se pot demonstra și pentru exponenți raționali oarecare.

Să demonstrăm, de exemplu, proprietatea 1). Fie pentru aceasta $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ numere raționale. Cazul în care ambele numere sînt pozitive a fost dat în paragraful precedent. Rămîn atunci de considerat următoarele cazuri:

1° ambii exponenți sînt negativi;

2° unul dintre exponenți este negativ, iar celălalt pozitiv;

3° cel puțin unul dintre exponenți este zero.

Să le analizăm pe rînd:

1° Dacă $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} < 0$, atunci $-\frac{m}{n}, -\frac{p}{q} > 0$. După definiție și aplicînd proprietatea analoagă a puterilor cu exponent rațional pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n} + \left(-\frac{p}{q}\right)}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

2° În cazul al doilea fie, de exemplu, $\frac{m}{n} > 0$ și $\frac{p}{q} < 0 \left(\text{adică } -\frac{p}{q} > 0\right)$. Să presupunem mai întîi că $\frac{m}{n} > -\frac{p}{q}$. Atunci, după definiție și proprietatea 5° a puterilor cu exponent pozitiv, avem:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \left(-\frac{p}{q}\right)} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Dacă $\frac{m}{n} < -\frac{p}{q}$, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{-\frac{p}{q}}}.$$

Dar $-\frac{p}{q} > \frac{m}{n} = -\left(-\frac{m}{n}\right)$ și după situația precedentă, avem:

$$\frac{1}{a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

În sfîrșit, dacă $\frac{m}{n} = -\frac{p}{q}$ adică $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = 0$, atunci $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} =$ $= 1 = a^0 = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$

3° Dacă unul sau ambii exponenți sînt zero proprietatea este evidentă (avem în vedere că $a^0 = 1$).

Lăsăm ca exercițiu demonstrarea celorlalte proprietăți.

Observație. Dacă în cazul puterilor cu exponent rațional pozitiv am putut vorbi despre proprietatea 5, doar pentru $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, în acest paragraf (după ce am definit puterile cu exponent rațional negativ) ea se poate demonstra și pentru $\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$ (cînd $a > 0$).

De *exemplu:*

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{16^{\frac{4}{5}}} = 16^{\frac{3}{4}-\frac{4}{5}} = 16^{-\frac{1}{20}} = (2^4)^{-\frac{1}{20}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

3. *Funcția putere cu exponent rațional.* Fiind dat un număr rațional $\frac{m}{n}$, nenul, putem defini o funcție

$$f : (0, \infty) \to (0, \infty),\ f(x) = x^{\frac{n}{m}},$$

numită *funcție putere cu exponent rațional.*

Deoarece $f(x) = (\sqrt[n]{x})^m$, rezultă că funcția putere cu exponent rațional are proprietăți asemănătoare cu ale funcției putere. Astfel:

a) Dacă $\frac{m}{n}$ este pozitiv, atunci funcția f este strict crescătoare.

b) Dacă $\frac{m}{n}$ este negativ, atunci funcția f este strict descrescătoare.

c) Funcția f este inversabilă, inversa sa fiind

$$g : (0, \infty) \to (0, \infty),\ g(x) = x^{\frac{m}{n}}.$$

Să demonstrăm a). Fie $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $x_1 < x_2$. Folosind proprietatea analoagă de monotonie a funcțiilor radical și putere deducem că $\sqrt[n]{x_1} < \sqrt[n]{x_2}$, de unde $(\sqrt[n]{x_1})^m < (\sqrt[n]{x_2})^m$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

Analog se demonstrează b).

Să arătăm în sfîrșit proprietatea c). Dacă $x \in (0, \infty)$, atunci $g(f(x)) = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = x$, iar dacă $y \in (0, \infty)$, atunci $f(g(y)) = \left(y^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}} = y$. Deci $g \circ f$ și $f \circ g$ sînt egale cu funcția identică a lui $(0, \infty,)$. Așadar, f este inversabilă, g fiind inversa sa.

Mai mult, fiind inversabilă, funcția putere cu exponent rațional este bijectivă (vezi § 3.7 din cap. II). În figura V.7 am reprezentat graficul funcției $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ (construit prin „puncte"). Cu linie întreruptă am reprezentat graficul funcției inverse $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $g(x) = x^{-2}$.

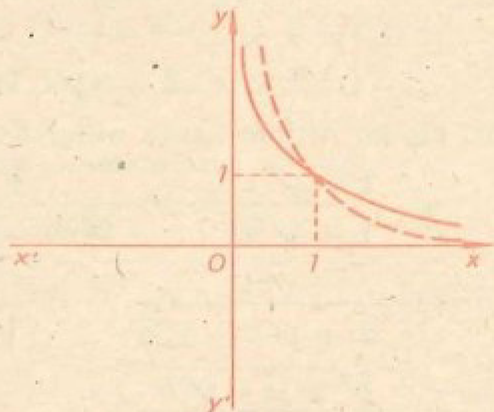


Fig. V.7

EXERCIȚII

1. Să se găsească radicalii:

a) $\sqrt{(x-1)^2}$; b) $\sqrt{(x+5)^2}$; c) $\sqrt{(2x^3-3x+1)^2}$; d) $\sqrt{(-3x^2+x-1)^2}$.

2. Să se efectueze suma:

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2}.$$

3. Să se construiască graficul funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x)=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(5-x)^2}.$$

4. Să se găsească valorile lui x, pentru care sînt definite expresiile:

a) $f(x)=\sqrt{x-2}$; b) $f(x)=\sqrt[5]{x-2}$; c) $f(x)=\sqrt[4]{3x^2+5x-2}$;
d) $f(x)=\sqrt[3]{3-x}+\sqrt[4]{5x-5}$; e) $f(x)=\sqrt[6]{x^2-x+1}$.

5. Să se calculeze:

a) $\sqrt{173^2-52^2}$; b) $\sqrt[3]{373^2-252^2}$; c) $\sqrt{(242{,}5)^2-(46{,}5)^2}$.

6. Să se simplifice expresiile:

$$\sqrt[10]{2^5};\ \sqrt[12]{(-5)^4};\ \sqrt[8]{a^4};\ \sqrt{\frac{625}{256}};\ \sqrt[6]{(\sqrt{7}-2)^3};$$

$$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2};\ \sqrt[9]{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^3};\ \sqrt[10]{(\sqrt{3}-4)^2};\ \sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^2}.$$

7. Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt[8]{[(x-1)(x+1)]^4}$; b) $\sqrt[8]{(x^2-x+1)^4}$.

8. Fără a calcula radicalii, să se găsească care dintre numerele următoare este mai mare:

a) $2\sqrt{3}$ sau $3\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{7}$ sau $8\sqrt{3}$; c) $3\sqrt[3]{4}$ sau $4\sqrt[3]{2}$.

9. Să se simplifice expresiile:

a) $\sqrt{5\sqrt[3]{625}}$; b) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{8}}}$; c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$;

d) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}}$.

10. Să se calculeze:

a) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$; b) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{250}-\sqrt[3]{686}-\sqrt[3]{16}$;
c) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{3})$; d) $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+\sqrt{10})\cdot$
$\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$.

11. Să se raționalizeze numitorii fracțiilor:

a) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{24}}$; c) $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$; d) $\frac{15}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{7}}$;

e) $\frac{31}{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{2}}}$; g) $\frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$;

h) $\frac{\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}{\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$.

12. Să se simplifice expresiile:

i) $\frac{3\sqrt{a}}{a} + a^{\frac{1}{6}}\sqrt[3]{a} - \frac{a^{\frac{2}{7}}}{\sqrt[21]{a}} - \frac{3a^0}{\sqrt{a}}\ (a > 0);$

ii) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{x-y}\ (x > 0,\ y > 0,\ x \neq y).$

13. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\sqrt{x+1} = 2$; b) $\sqrt{x-3} = x-3$; c) $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x + \sqrt{x+8}}$;

d) $\sqrt{7 - \sqrt{x-3}} = 2$; e) $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$;

f) $\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-3}$; g) $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2+24}} = x+1$;

h) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}$; i) $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+3} = 2 - \sqrt{10}$;

j) $\sqrt{1+ax} = x + \sqrt{1-ax}$; k) $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$;

l) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + 1 = 0$; m) $x + \sqrt{6 + \sqrt{x^2}} = 0$.

14. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $f_1 : [1, \infty) \to \mathbf{R},\ f_1(x) = \sqrt{x-1}$; b) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f_2(x) = \sqrt[3]{x-2}$;

c) $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$.

15. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele:

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\left(\frac{49}{16}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{4}}$; b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$; $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$;

c) $1; \sqrt{2}; \sqrt[3]{3}; \sqrt[4]{4}$.

16. Să se demonstreze identităţile (formulele radicalilor compuşi):

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

unde a, b şi $a^2 - b$ sînt numere reale nenegative.

17. Folosind formulele radicalilor compuşi să se transforme expresiile:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; b) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; c) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; d) $\sqrt{9-\sqrt{45}}$;

e) $\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}$.

18. Să se demonstreze că, pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$,

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

19. Să se calculeze:

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[12]{y^{19}}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}} \sqrt[3]{y}}{\sqrt[4]{xy^{-1}}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x^{-\frac{3}{8}}}{y^{-\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{4}{3}},$$

pentru $x = 5$; $y = 20$.

29. Să se calculeze:

$$\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^{-2} (x^{-1} + y^{-1}) + \frac{2}{\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right)^{3}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}} \right),$$

dacă se dă că:

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)^{-\frac{1}{3}}; \quad \sqrt[7]{y} = \sqrt[7]{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{-1}.$$

21. Să se arate că, pentru orice $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ și $\sqrt{abc} > 2$, are loc identitatea

$$\frac{\sqrt{\frac{abc + 4}{a} - 4\sqrt{\frac{bc}{a}}}}{\sqrt{abc} - 2} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

CAPITOLUL VI

NUMERE COMPLEXE

Prin introducerea numerelor reale se pot exprima rezultatele oricăror măsurători, dar problema soluțiilor ecuațiilor de orice tip, cu coeficienți reali, nu este rezolvată. Ecuații simple ca $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ nu au soluții în mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. De aceea, se pune în mod necesar problema extinderii în continuare a noțiunii de număr. Această extindere conduce la noțiunea de număr complex. Vom arăta la sfîrșitul acestui capitol că mulțimea numerelor complexe este suficient de largă, încît orice ecuație de gradul al doilea cu coeficienți reali să aibă soluții în această mulțime.

Numerele complexe nu reprezintă rezultatul unor măsurători și de aceea teoria numerelor complexe are un caracter mai abstract, mai formal decît teoria numerelor reale. Remarcăm că în pofida acestui grad de abstractizare a noțiunilor, teoria numerelor complexe, prin implicațiile sale, are multiple aplicații practice (de exemplu, în: mecanică, electrotehnică, fizică atomică ș.a.).

§1. MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

1.1. Definirea numerelor complexe

Prezentăm acum construcția mulțimii numerelor complexe, plecînd de la mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale.

Fie produsul cartezian

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\},$$

adică mulțimea perechilor ordonate de numere reale.

Precizăm că, două perechi (a, b) și (a', b') sînt *egale* dacă și numai dacă $a = a'$ și $b = b'$. Astfel egalitatea $(a, b) = (a', b')$ este echivalentă cu două egalități de numere reale: $a = a'$ și $b = b'$.

Definim pe mulțimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*.

Dacă $z = (a, b)$ şi $z' = (a', b')$ aparţin mulţimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, atunci definim:

$$z + z' = (a + a', b + b'). \tag{1}$$

Elementul $(a + a', b + b')$ se numeşte *suma* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază suma lor, se numeşte *adunare*.

De asemenea, definim:

$$zz' = (aa' - bb', ab' + a'b). \tag{2}$$

Elementul $(aa' - bb', ab' + a'b)$ se numeşte *produsul* dintre z şi z', iar operaţia prin care oricăror elemente z şi z' din mulţimea $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ se asociază produsul lor, se numeşte *înmulţire*.

De *exemplu:*

$$(2, -1) + (-3, 1) = (2 - 3, -1 + 1) = (-1, 0),$$

$$(2, -1)(-3,1) = (2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1, 2 \cdot 1 + (-1)(-3)) = (-6 + 1, 2 + 3) = = (-5, 5).$$

Definiţie. Fiecare element al mulţimii $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, pe care sînt definite cele două operaţii precedente (1) şi (2), se numeşte *număr complex*.

Se notează cu $\mathbf{C}$ *mulţimea numerelor complexe*.

Fie submulţimea lui $\mathbf{C}$:

$$R' = \{(a, 0) \mid a \in \mathbf{R}\}.$$

Funcţia de la $\mathbf{R}$ la R' definită prin

$$a \to (a, 0)$$

este evident o funcţie bijectivă de la mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale în submulţimea R' a lui $\mathbf{C}$.

Mai mult, operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor complexe care aparţin mulţimii R' se transcriu astfel:

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0);$$

$$(a, 0)(a', 0) = (aa', 0).$$

Aceste relaţii arată că adunarea şi înmulţirea pe R' se fac după aceleaşi reguli ca adunarea şi înmulţirea numerelor reale. Din acest motiv rezultă că R' are aceleaşi proprietăţi aritmetice ca mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. Acest fapt, permite să identificăm numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a. Practic, această identificare revine la a înlocui numărul complex $(a, 0)$ cu numărul real a şi invers.

Aşadar punem $(a, 0) = a$. În particular, numerele complexe $(0, 0)$ şi $(1, 0)$ sînt numerele reale 0 şi 1.

1.2. Proprietățile adunării numerelor complexe

1° Adunarea este *comutativă*, adică oricare ar fi z și z' din $\mathbb{C}$, avem

$$z + z' = z' + z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci avem $z + z' = (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$. Analog avem $z' + z = (a' + a, b' + b)$. Cum însă adunarea numerelor reale este comutativă avem $a + a' = a' + a$ și $b + b' = b' + b$. Deci $(a + a', b + b') = (a' + a, b' + b)$, adică $z + z' = z' + z$.

2° Adunarea este *asociativă*, adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbb{C}$, avem

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci avem $(z + z') + z'' = [(a, b) + (a', b')] + (a'', b'') = (a + a', b + b') + (a'', b'') = ((a + a') + a'', (b + b') + b'')$. Analog avem $z + (z' + z'') = (a + (a' + a''), b + (b' + b''))$. Cum însă adunarea numerelor reale este asociativă avem $(a + a') + a'' = a + (a' + a'')$ și $(b + b') + b'' = b + (b' + b'')$. Deci $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.

3° *Element neutru*. Numărul complex $0 = (0, 0)$ este *element neutru* pentru adunare adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$ avem

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci cum 0 este element neutru pentru adunarea numerelor reale, avem

$$z + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = z.$$

Dar după proprietatea 1°, avem de asemenea $0 + z = z$.

4° Orice număr complex are un *opus*, adică oricare ar fi z din $\mathbb{C}$ există un număr complex, notat cu $-z$, astfel încît

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, atunci $-z = (-a, -b)$, deoarece

$$z + (-z) = (a, b) + (-a, -b) = (a + (-a), b + (-b)) = (0, 0) = 0.$$

Conform proprietății 1° avem, de asemenea, $(-z) + z = 0$.

De exemplu:

dacă $z_1 = (2, 3)$, atunci $-z_1 = (-2, -3)$,

dacă $z_2 = (-1, 1)$, atunci $-z_2 = (1, -1)$.

Observație. Dacă z și z' sînt numere complexe, suma $z + (-z')$ se notează, simplu prin $z - z'$ și se numește *diferența* dintre z și z'. Operația prin care oricăror două numere complexe z și z' se asociază diferența lor se numește *scădere*.

Dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci avem formula:

$$z - z' = (a - a', b - b'). \qquad (3)$$

De *exemplu:* dacă $z = (2, -5)$ și $z' = (-3, 1)$, atunci $z - z' = z + (-z') = (2, -5) + [-(-3, 1)] = (2, -5) + (3, -1) = (5, -6)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

1° Înmulțirea este *comutativă*, adică oricare ar fi z și z' din $\mathbf{C}$, avem:

$$zz' = z'z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ și $z' = (a', b')$, atunci $zz' = (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b)$. Analog, avem $z'z = (a'a - b'b, a'b + ab')$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor reale sînt operații comutative, avem $aa' - bb' = a'a - b'b$ și $ab' + a'b = a'b + ab'$.
Deci $zz' = z'z$.

2°. Înmulțirea este *asociativă*, adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbf{C}$, avem

$$(zz')z'' = z(z'z'').$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b), z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $(zz')z'' = [(aa' - bb', ab' + a'b)](a'', b'') = ((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + a''(ab' + a'b)) = (aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + a''ab' + a''a'b)$. Analog, avem $z(z'z'') = (aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - ba''b', aa'b'' + aa''b' + a'a''b - b'b''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării și înmulțirii numerelor reale, rezultă că expresiile lui $(zz')z''$ și $z(z'z'')$ sînt aceleași; deci $(zz')z'' = z(z'z'')$.

3° *Element neutru*. Numărul complex $1 = (1, 0)$ este *element neutru* pentru înmulțire, adică oricare ar fi z din $\mathbf{C}$ avem

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$ atunci cum 1 este element neutru pentru înmulțirea numerelor reale, avem

$$z \cdot 1 = (a, b)(1, 0) = (a, b) = z.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea, $1 \cdot z = z$.

4° Orice număr complex diferit de 0 are un *invers*, adică oricare ar fi $z \neq 0$ există un număr complex, notat cu z^{-1}, astfel încît

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Fie $z = (a, b)$ diferit de $(0, 0)$, adică cel puțin una din componentele a sau b este nenulă, altfel spus, $a^2 + b^2 \neq 0$. Dacă (x, y) este un număr complex astfel încît $(a, b)(x, y) = (1, 0)$, atunci

$$(ax - by, bx + ay) = (1, 0).$$

De aici rezultă:

$$ax - by = 1,$$
$$bx + ay = 0.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

După proprietatea 1° avem, de asemenea,

$$(x, y)(a, b) = (1, 0).$$

Deci

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Observația 1. În loc de z^{-1} $(z \neq 0)$, se folosește uneori notația $\frac{1}{z}$. Dacă $z' = (a', b')$ este un alt număr complex, atunci $z'z^{-1}$ se notează încă prin $\frac{z'}{z}$ și se numește *cîtul împărțirii* lui z' la z $(z \neq 0)$.

Cîtul $\frac{z'}{z}$ este definit de formula:

$$\frac{z'}{z} = \left(\frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2}, \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}\right) \quad (4)$$

Exemple:

1) dacă $z = (2, -1)$ atunci $z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{2}{4+1}, \frac{1}{4+1}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

2) dacă $z = (2, -1)$ și $z' = (1, -1)$, atunci

$$z'z^{-1} = \frac{z'}{z} = \left(\frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{4+1}, \frac{2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)}{4+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{2+1}{5}, \frac{-2+1}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}\right).$$

5°. ***Înmulțirea este distributivă față de adunare***, adică oricare ar fi z, z' și z'' din $\mathbb{C}$, au loc relațiile:

$$z(z' + z'') = zz' + zz''$$

$$(z + z')z'' = zz'' + z'z''.$$

Într-adevăr, dacă $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ și $z'' = (a'', b'')$, atunci $z(z' + z'') = (a, b) \cdot [(a', b') + (a'', b'')] = (a, b)\ (a' + a'', b' + b'') = (a(a' + a'') - b(b' + b''), a(b' + b'') + (a' + a'')b) = (aa' + aa'' - bb' - bb'', ab' + ab'' + a'b + a''b)$. Pe de altă parte, avem $zz' + zz'' = (a, b)\ (a', b') + (a, b)\ (a'', b'') = (aa' - bb', ab' + a'b) + (aa'' - bb'', ab'' + a''b) = (aa' - bb' + aa'' - bb'', ab' + a'b + ab'' + a''b)$. Avînd în vedere comutativitatea adunării numerelor reale, rezultă că expresiile lui $z(z' + z'')$ și $zz' + zz''$ sînt aceleași; deci $z(z' + z'') = zz' + zz''$.

Analog, se demonstrează cea de a doua relație pe care o lăsăm ca exercițiu.

Observația 2. Să observăm că numărul complex $(0, 1)$ are proprietatea $(0, 1)\ (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Rezultă deci că $(0,1)$ este o rădăcină a ecuației $x^2 + 1 = 0$. Așadar, această ecuație are soluții în mulțimea numerelor complexe, ceea ce nu era posibil în mulțimea numerelor reale.

§2. FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

2.1. Notația $z = (a, b)$, introdusă pentru numerele complexe, nu este prea comodă în calculele cu numere complexe. De aceea, de obicei, se folosește o altă scriere a numerelor complexe. Convenim să notăm numărul com-

plex (0, 1) prin i. Atunci, după regulile de adunare și înmulțire a numerelor complexe, avem:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1).$$

Deoarece $(a, 0)$ și $(b, 0)$ se identifică cu a respectiv b, iar $(0, 1)$ s-a notat cu i, atunci această scriere se reprezintă sub forma

$$(a, b) = a + bi.$$

Această expresie se numește *forma algebrică* a numărului complex (a, b).

De *exemplu:*

$$(2, -1) = 2 + (-1)i = 2 - i;$$

$$(1, 0) = 1 + 0 \cdot i = 1;$$

$$(0, -5) = 0 + (-5)i = -5i.$$

În continuare vom scrie numerele complexe sub forma lor algebrică.

Numărul complex i se numește *unitate imaginară*. Numerele de forma bi, cu b număr real, se numesc *imaginare*. Dacă numărul complex z se scrie sub forma $z = a + bi$, atunci a se numește *partea reală*, iar bi *partea imaginară* a numărului z. Numărul b se numește *coeficientul părții imaginare**.

De exemplu, pentru numărul complex $4 + 5i$, partea reală este 4, iar partea imaginară $5i$; coeficientul părții imaginare este egal cu 5. Pentru numărul $-2i$, partea reală este 0, cea imaginară $-2i$, iar coeficientul părții imaginare este -2. Pentru numărul 3, partea reală este 3, cea imaginară este $0 \cdot i = 0$, iar coeficientul părții imaginare este egal cu 0.

Reluăm mai jos adunarea și înmulțirea a două numere complexe reprezentate sub forma lor algebrică. Astfel:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i; \tag{1'}$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i. \tag{2'}$$

Deci, *suma a două numere complexe este un număr complex a cărui parte reală, respectiv imaginară, este suma părților reale, respectiv imaginare, ale numerelor date.*

Formula (2') care dă înmulțirea a două numere complexe este mai greu de reținut și chiar de formulat. Observăm însă că, dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$ sînt numere complexe, atunci avînd în vedere proprietățile operațiilor pe $\mathbb{C}$ rezultă:

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + (ab' + a'b)i + bb'i^2.$$

Dar, înlocuind $i^2 = -1$ în ultima relație, se obține formula (2').

---

* Pentru un număr complex $z = a + bi$ se notează, uneori, $a = \mathrm{Re}(z)$, care se citește „real de z" și $b = \mathrm{Im}(z)$, care se citește „imaginar de z".

2.2. Numere complexe conjugate

Dacă $z = a + bi$ este un număr complex, atunci numărul $a - bi$, notat prin $\bar{z}$ (adică z barat) sau $\overline{a + bi}$ se numeşte *conjugatul* său. Evident, conjugatul lui $\bar{z}$ este z. De aceea, numerele complexe z şi $\bar{z}$ se numesc *conjugate*.

Dacă a este un număr real oarecare, atunci

$$a = a + 0i = a - 0i = \bar{a},$$

şi deci a este egal cu conjugatul său. Mai mult, dacă $a + bi$ este un număr complex, astfel încît $a + bi = a - bi$, atunci $b = -b$, de unde $b = 0$. Deci $a + bi = a + 0i = a$ este un număr real.

Astfel, am arătat că: *dintre toate numerele complexe, numerele reale (şi numai ele) sînt egale cu conjugatele lor.*

Avem următoarele proprietăţi:

1° *Suma şi produsul a două numere complexe conjugate sînt numere reale.* Într-adevăr, $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ şi

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2° Oricare ar fi numerele complexe z şi z' avem

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}',$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

Într-adevăr, dacă $z = a + bi$ şi $z' = a' + b'i$, atunci

$$\overline{z + z'} = \overline{(a + a') + (b + b')i} = (a + a') - (b + b')i =$$
$$= (a - bi) + (a' - b'i) = \bar{z} + \bar{z}';$$

$$\overline{zz'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + a'b)i} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i =$$
$$= (a - bi)(a' - b'i) = \bar{z}\bar{z}'.$$

Formulele (3) şi (4), aplicate numerelor complexe scrise sub formă algebrică, dau relaţiile:

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i \qquad (3')$$

$$\frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}i. \qquad (4')$$

Pentru relaţia (3′) se poate da o regulă analoagă celei date pentru adunare. Observăm, de asemenea, că (4′) rezultă dacă amplificăm fracţia $\frac{a' + b'i}{a + bi}$ prin conjugatul numitorului, care este $a - bi$.

În particular, aşa se poate proceda şi pentru aflarea inversului unui număr complex. Într-adevăr, dacă $a' + b'i = 1$ şi $a + bi \neq 0$, atunci

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Exemple:

1) $\frac{7-i}{3+i} = \frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21-7i-3i-1}{9+1} = \frac{20-10i}{10} = 2-i;$

2) $\frac{2+3i}{2+i} = \frac{(2+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{4-2i+6i+3}{4+1} = \frac{7+4i}{5} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i;$

3) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$

2.3. Modulul unui număr complex

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ se definește ca fiind *numărul real* $\sqrt{a^2 + b^2}$ și se notează prin $|z| = |a + bi|$.

Modulul unui număr complex $z = a + bi$ este întotdeauna pozitiv, el fiind egal cu zero dacă și numai dacă $a = b = 0$.

Exemple: $|1 + 3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $|-1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,
$|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{0+4} = 2$, $|4| = |4 + 0i| = \sqrt{16+0} = 4$.

Dacă z și z' sînt două numere complexe, atunci

1° $$|zz'| = |z|\,|z'|;$$

2° $$|z'| - |z| \leqslant |z' + z| \leqslant |z'| + |z|.$$

Să demonstrăm prima relație. Într-adevăr dacă $z = a + bi$ și $z' = a' + b'i$, atunci $|zz'| = |(aa' - bb') + (ab' + a'b)i| =$

$$= \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a'^2 + b'^2} = |z|\,|z'|.$$

A doua relație o lăsăm ca exercițiu. Noi însă o vom demonstra în paragraful următor pe cale vectorială.

2.4. Puterile numărului i

Conform observației 2 din paragraful 1.3 avem $i^2 = -1$. Atunci se deduce succesiv:

$$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i.$$
$$i^4 = i^3 i = (-i)i = 1.$$

În general, fie n un număr natural oarecare. Atunci numărul n se găsește într-una (și numai într-una) din următoarele situații:

1° $n = 4k$ (k, număr natural) și deci $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$;

2° $n = 4l + 1$ (l, număr natural) și deci $i^n = i^{4l+1} = i^{4l} \cdot i = 1 \cdot i = i$;

3° $n = 4p + 2$ (p, număr natural) și deci $i^n = i^{4p+2} = i^{4p} \cdot i^2 = 1(-1) = -1$;

4° $n = 4q + 3$ (q, număr natural) și deci $i^n = i^{4q+3} = i^{4q} \cdot i^3 = 1(-i) = -i$.

Așadar, puterile cu exponent natural ale lui i sînt elementele mulțimii $\{-1, 1, -i, i\}$.

De exemplu,

$$i^{25} = i^{4\cdot 6+1} = (i^4)^6 \cdot i = 1 \cdot i = i,$$
$$i^{18} = i^{4\cdot 4+2} = (i^4)^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$
$$i^{31} = i^{4\cdot 7+3} = (i^4)^7 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

§3. REPREZENTAREA GEOMETRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

3.1. Amintim că numerele reale se pot reprezenta prin punctele unei axe. Mai precis, fie d o axă pe care fixăm o origine O și o unitate de măsură. Dacă asociem fiecărui punct al dreptei d abscisa sa, se obține o funcție bijectivă de la punctele acestei drepte în mulțimea numerelor reale.

Un număr complex, $z = a + bi$, este determinat prin două numere reale a și b. De aceea este natural ca să reprezentăm geometric numerele complexe prin punctele unui plan.

Fie pentru aceasta un plan π în care ne fixăm un sistem de axe ortogonale xOy. Fiecărui număr complex $z = a + bi$, i se asociază punctul M de coordonate (a, b) (fig. VI.1).

Punctul M se numește *imaginea geometrică* a numărului complex $a + bi$, iar numărul $a + bi$ se numește *afixul punctului M*.

Din teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul dreptunghic OMM', se deduce că $OM = \sqrt{OM'^2 + MM'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Această egalitate ne arată că lungimea segmentului $[OM]$ este modulul numărului complex $z = a + bi$.

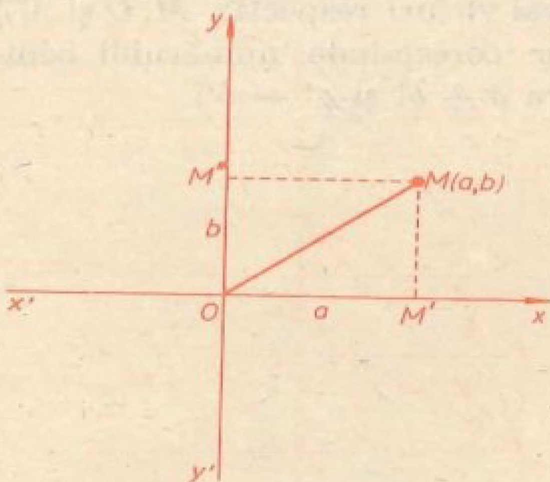


Fig. VI.1

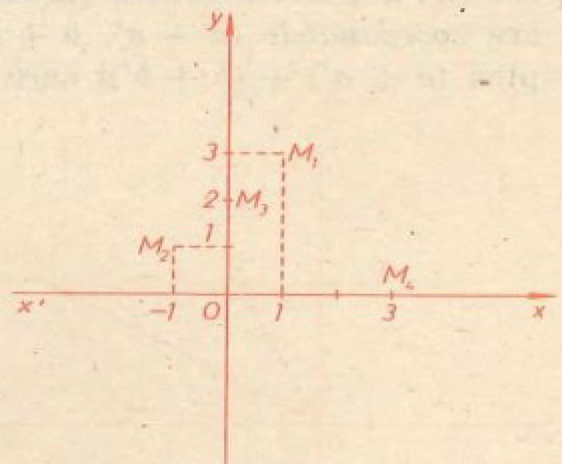


Fig. VI.2

Exemple. Numerelor complexe $1 + 3i$, $-1 + i$, $2i = 0 + 2i$, $3 = 3 + 0i$, li se asociază respectiv punctele $M_1(1, 3)$, $M_2(-1, 1)$, $M_3(0, 2)$, $M_4(3, 0)$ (fig. VI.2).

Avem $OM_1 = |1 + 3i| = \sqrt{10}$, $OM_2 = |-1 - i| = \sqrt{2}$, $OM_3 = |2i| = 2$, $OM_4 = |3| = 3$.

Asocierea

$$z = a + bi \to M(a, b)$$

este o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe la punctele planului π. Prin această funcție, mulțimii numerelor reale îi corespunde axa $x'x$,

iar mulțimii numerelor imaginare îi corespunde axa $y'y$. De aceea axa $x'x$ se numește axa reală, iar axa $y'y$ axa imaginară. Planul ale cărui puncte se identifică cu numerele complexe prin funcția bijectivă definită mai înainte se numește *planul complex*.

3.2. Interpretarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe

Numerele complexe au și o altă interpretare geometrică. Să asociem fiecărui punct M al planului π vectorul $\overrightarrow{OM}$, care are originea în O și capătul în punctul M. Această asociere este evident o funcție bijectivă de la mulțimea numerelor complexe în mulțimea vectorilor care au originea în $O(0, 0)$. Astfel fiecare număr complex $a + bi$ poate fi reprezentat geometric ca vectorul $\overrightarrow{OM}$ unde M are coordonatele (a, b). Se spune că (a, b) sînt coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}$.

Reprezentarea numerelor complexe cu ajutorul vectorilor ne dă o interpretare simplă a adunării numerelor complexe:

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

Este cunoscut că la adunarea vectorilor coordonatele corespunzătoare lor se adună. De aceea dacă vectorul $\overrightarrow{OM}$ (fig. VI.3) are coordonatele (a, b), iar vectorul $\overrightarrow{OM'}$ are coordonatele (a', b'), atunci *vectorul* $\overrightarrow{OS}$ (S fiind al patrulea vîrf al paralelogramului, care are celelalte trei vîrfuri respectiv M, O și M') are *coordonatele* $(a + a', b + b')$. Acest vector corespunde numărului complex $(a + a') + (b + b')i$ care este *suma* dintre $a + bi$ și $a' + b'i$.

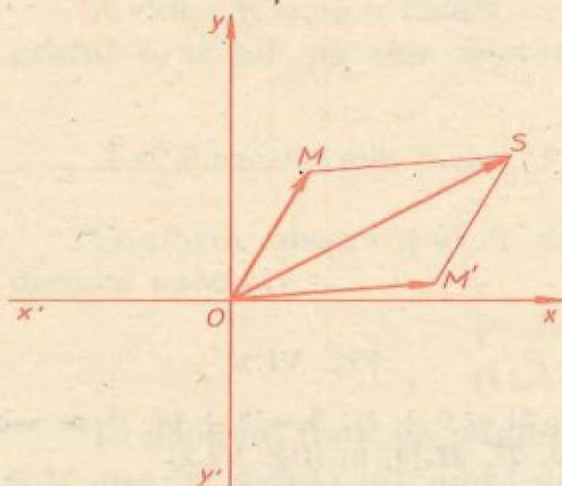


Fig. VI.3

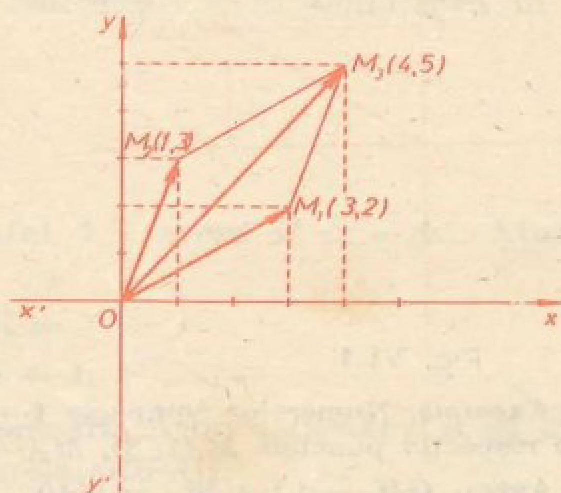


Fig. VI.4

Exemplu. Fie numerele complexe $z_1 = 3 + 2i$ și $z_2 = 1 + 3i$, reprezentate în plan prin vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ unde: $M_1(3, 2)$ și $M_2(1, 3)$ (fig. VI.4). Atunci suma $z_3 = z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 + 3i) = 4 + 5i$ este reprezentată în plan prin vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ unde M_3 este punctul de coordonate $(4, 5)$.

Observăm, de asemenea, că opusul numărului $a + bi$, care este $-a - bi$, este reprezentat prin vectorul $\overrightarrow{OM_1}$, unde M_1 este simetricul punctului $M(a, b)$ față de origine (fig. VI.5). Astfel se deduce uşor interpretarea geometrică a scăderii a două numere complexe.

Cum $z' - z = z' + (-z)$, avînd în vedere interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe, rezultă că D are coordonatele $(a' - a, b' - b)$ şi vectorul $\overrightarrow{OD}$ corespunde diferenței

$$z' - z = (a' - a) + (b' - b)i.$$

Avem $OM = |z|$, $OM' = |z'|$, $OD = |z' - z|$ şi $OS = |z' + z|$.

Relațiile dintre laturi în triunghiurile OMS și OMM' dau respectiv:

$$MS - OM \leqslant OS \leqslant MS + OM,$$

$$OM' - OM \leqslant MM' \leqslant OM' + OM.$$

Dar cum $MS = OM'$ și $MM' = OD$, rezultă:

$$|z'| - |z| \leqslant |z' + z| \leqslant |z'| + |z|,$$

$$|z'| - |z| \leqslant |z' - z| \leqslant |z'| + |z|.$$

Observație. Definiţia produsului numerelor complexe are o interpretare geometrică mai puţin simplă. Aceasta se va face la geometrie, cu ajutorul reprezentării trigonometrice a numerelor complexe.

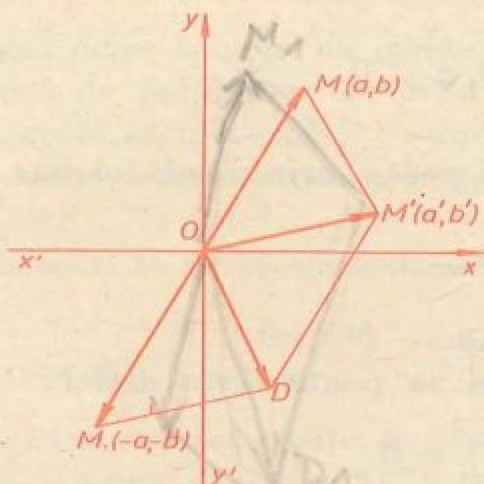


Fig. VI.5

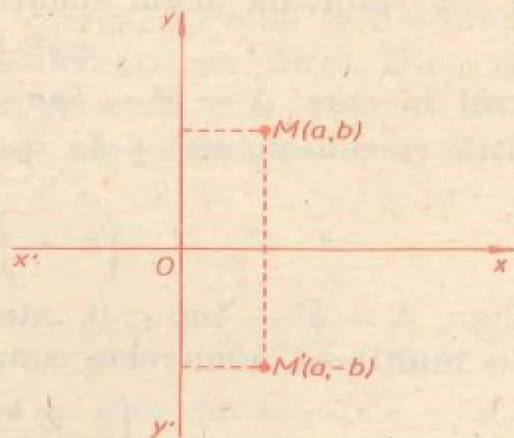


Fig. VI.6

3.3. Interpretarea geometrică a numerelor complexe conjugate

Dacă M este imaginea geometrică a numărului complex $a + bi$ (fig. VI.6), atunci simetricul M' al lui M față de axa reală este imaginea geometrică a conjugatului său, $a - bi$.

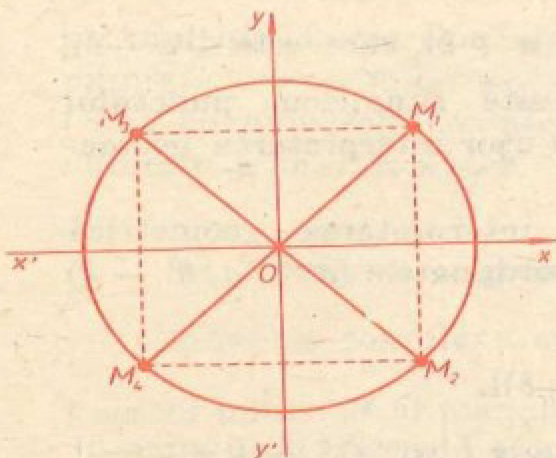


Fig. VI.7

Observăm, de asemenea, că numerele complexe de modul egal cu r se reprezintă în plan prin punctele cercului cu centrul în origine și de rază egală cu r.

De *exemplu*, numerele: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$, al căror modul este egal cu 1 se găsesc pe cercul cu centrul în origine și de rază unitate (punctele M_1, M_2, M_3, M_4) (fig. VI.7).

§4. REZOLVAREA ECUAȚIEI DE GRADUL AL DOILEA CU COEFICIENȚI REALI

În capitolul I, am rezolvat ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali, în cazul în care discriminantul său este pozitiv sau nul. Am arătat astfel că rădăcinile ecuației

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$$

pentru $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$, sînt date de formulele:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

În acest caz rădăcinile ecuației sînt numere reale.

1. Să rezolvăm acum ecuația

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$$

în cazul în care $\Delta=b^2-4ac<0$.

Știm că ecuația $ax^2+bx+c=0$ se mai poate scrie și sub forma:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Cum $\Delta=b^2-4ac<0$, atunci $-\Delta=4ac-b^2>0$.

În mulțimea numerelor complexe ecuația se poate scrie astfel:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

sau

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0,$$

de unde

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=0 \text{ sau } x+\frac{b}{2a}-\frac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=0.$$

Deducem de aici că, *în acest caz, rădăcinile ecuației de gradul al doilea sînt:*

$$x_1=\frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a} \text{ și } x_2=\frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

Așadar, dacă $\triangle < 0$ rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ sînt *numere complexe conjugate.*

Relațiile lui Viète sînt evident aceleași ca în cazul cînd $\triangle \geqslant 0$, adică

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

2. *Formarea ecuației de gradul al doilea cînd se cunosc rădăcinile.*

Fie x_1 și x_2 numere complexe date. Pentru ca ele să fie rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea cu coeficienți reali, trebuie ca x_1 și x_2 să fie conjugate. Deci $x_1 = a + bi$ și $x_2 = a - bi$. Atunci

$$x_1 + x_2 = 2a \text{ și } x_1 x_2 = a^2 + b^2.$$

Ecuația de gradul al doilea care are ca rădăcini pe x_1 și x_2 va fi $x^2 + px + q = 0$, unde $-p = x_1 + x_2 = 2a$, iar $q = x_1 x_2 = a^2 + b^2$.

Deci, ecuația $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$ are ca rădăcini numerele complexe: $a + bi$ și $a - bi$.

3. *Descompunerea trinomului de gradul al doilea cu coeficienți reali în produs de polinoame de gradul întîi.*

Fie trinomul $aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, cu a, b, c numere reale. Dacă x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci un raționament analog celui făcut în cap. I, § 2.4, pentru cazul $b^2 - 4ac \geqslant 0$, dă

$$aX^2 + bX + c = a(X - x_1)(X - x_2) = (aX - ax_1)(X - x_2).$$

Deci orice trinom de gradul al doilea cu coeficienți reali se descompune în produs de polinoame de gradul întîi cu coeficienți complecși. Din cap. I, § 2.4 rezultă că în cazul $b^2 - 4ac \geqslant 0$ și numai în acest caz, trinomul de gradul al doilea se descompune în produs de factori de gradul întîi cu coeficienți reali.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuația:

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Avem $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. Atunci $x_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

2) Să se găsească ecuația de gradul al doilea care are rădăcinile $x_1 = \sqrt{3} - i$ și $x_2 = \sqrt{3} + i$. Avem $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$ și $x_1 x_2 = 4$. Deci ecuația căutată este $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$.

3) Să se descompună în factori de gradul întîi trinomul $X^2 - 2X + 10$.

Rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 10 = 0$ sînt:

$$x_1 = 1 + 3i \text{ și } x_2 = 1 - 3i.$$

Atunci $X^2 - 2X + 10 = (X - 1 - 3i)(X - 1 + 3i)$.

Aplicație. Descompunerea trinomului în factori de gradul întîi se folosește la simplificarea fracțiilor. Dacă printre factorii numărătorului și ai numitorului sînt trinoame de gradul al doilea, le descompunem în factori de gradul întîi ca la pct. 3 și apoi factorii comuni la numărător și la numitor se pot simplifica.

Exemple. 1) Să se simplifice fracţia: $\frac{X^2+10X-11}{-5X^2+7X-2}$.

Descompunînd în factori numărătorul şi numitorul, obţinem:

$$\frac{X^2+10X-11}{-5X^2+7X-2}=\frac{(X-1)(X+11)}{(X-1)(-5X+2)}=\frac{X+11}{-5X+2}.$$

2) Să se simplifice fracţia $\frac{X^3+X^2+X+1}{X^3+(1-i)X^2-iX}$.

Avem $\frac{X^3+X^2+X+1}{X^3+(1-i)X^2-iX}=\frac{(X+1)(X+i)(X-i)}{X(X+1)(X-i)}=\frac{X+i}{X}$.

EXERCIŢII

1. Să se găsească numerele reale x şi y din ecuaţiile:

a) $(5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$;

b) $(x+3yi)+\frac{3}{2}y+2xi=4+8i$;

c) $\left(-3y+\frac{1}{2}xi\right)-(-8x+5yi)=-2+12i$;

d) $\frac{x-2}{1-i}+\frac{y-3}{1+i}=1-3i$.

2. Să se calculeze:

a) $(2+i)(3-2i)$; b) $(-6+i)(5+2i)$; c) $(\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+2i)$;

d) $(\sqrt{2}+3i)(3-\sqrt{2}i)$; e) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$.

3. Să se calculeze:

a) $\frac{2+3i}{1-i}$; b) $\frac{2i}{2-i}$; c) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; d) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,i}{b\sqrt{a}-a\sqrt{b}\,i}$; e) $\frac{-2-5i}{4+i}-\frac{6-7i}{4-i}$;

f) $\frac{a-bi}{b+ai}-i\frac{b-ai}{a+bi}$; g) $\frac{\sqrt{1+a}+i\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-i\sqrt{1-a}}-\frac{\sqrt{1-a}+i\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}-i\sqrt{1+a}}$;

h) $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4$.

4. Să se demonstreze egalităţile

a) $\frac{6-i}{3+4i}=\frac{13+41i}{-25+25i}$; b) $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$.

5. Să se spună care sînt conjugatele numerelor complexe: $1+i$, $2-3i$; 5; $4i$; 0, $2i-1$ şi să se interpreteze geometric.

6. Să se calculeze:

a) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}$; b) $(-i)^3+(-i)^{13}+(-i)^{23}+(-i)^{33}+(-i)^{43}$;

c) $i+i^2+i^3+i^4+\ldots+i^n$ $(n\geqslant 4)$; d) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}$; e) $\frac{1}{i^{11}}-\frac{1}{i^{41}}+\frac{1}{i^{75}}-\frac{1}{i^{243}}$;

f) $[i(2-i)]^2$; g) $[2i(3-4i)]^2$; h) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$, $n\in\mathbf{N}$.

7. Să se găsească valorile reale ale lui m astfel încît numărul $3i^3 - 2mi^2 + (1 - m)i + 5$ să fie: a) real; b) imaginar; c) nenul.

8. Să se găsească toate numerele complexe ale căror pătrate să fie:

a) i; b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; c) $-i$; d) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

9. Să se reprezinte în plan numerele complexe:

a) $3 + 5i$; b) $4 - i$; c) $-2 - 2i$; d) $-4i$; e) $5i$; f) $-5 - 5i$.

10. Să se dea interpretarea geometrică a formulelor:

$$(1 + 3i) + (1 - 3i) = 2;$$
$$(3 - 5i) + (-1 + 3i) = 2 - 2i.$$

11. Să se descompună în factori de gradul întîi trinoamele:

a) $X^2 - 2X + 2$; b) $4X^2 + 4X + 5$; c) $X^2 - 14X + 74$.

12. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 45; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ xy = 1. \end{cases}$

13. Să se simplifice fracțiile:

a) $\frac{15X^2 - 8mX + m^2}{12X^2 - mX - m^2}$; b) $\frac{12X^2 - X - 1}{3X^2 + 5X - 2}$; c) $\frac{X^3 - 2X^2 - X + 2}{X^3 - 3X^2 + 2X}$;

d) $\frac{X^4 + 1}{X^2 + X\sqrt{2} + 1}$; e) $\frac{X^2 - X + 1}{X^4 + X^2 + 1}$; f) $\frac{X^2 + 3iX - 2}{X^2 + iX + 2}$.

14. Să se găsească ecuațiile de gradul al doilea cu coeficienți reali, astfel încît una dintre rădăcini să fie:

a) $(3 - i)(2i - 4)$; b) $\frac{32 - i}{1 - 3i}$; c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}\,i$ (a, b fiind numere reale și pozitive).

15. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^3 = 27$; b) $x^3 = -27$; c) $3x^3 = 2$; d) $x^3 = -5$; e) $x^4 = 16$; f) $x^4 = -16$; g) $x^4 = -3$; h) $3x^4 = 5$.

16. Să se găsească suma tuturor rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^3 = -4$; b) $x^4 = 4$.

17. Să se găsească produsul tuturor rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^3 = 6$; b) $x^4 = -7$.

18. Să se arate că pătratul unui număr complex $z = a + bi$ este real dacă și numai dacă ori $a = 0$, ori $b = 0$.

19. Să se găsească numerele reale x și y astfel încît

a) $(xi - y)^2 = 6 - 8i + (x + yi)^2$;

b) $\frac{i}{x} + \frac{i}{y} + \frac{1}{a} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{bi}{y}$ (a și b fiind numerele reale cu $a \neq 0$).

20. Să se determine perechile (x, y) din plan pentru care:

a) $|\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{y - 4}\,i| = \sqrt{10}$; $y \geqslant 4$

b) $|\sqrt{2x + y} + \sqrt{x + 2y}\,i| = \sqrt{3}$; $2x + y \geqslant 0$, $x + 2y \geqslant 0$.

21. Să se rezolve sistemele de ecuaţii:

a) $\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + y^4 = 5 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x^2 - xy = 28 \\ y^2 - xy = -12. \end{cases}$

22. Dacă $a + bi$ este un număr complex dat, să se găsească numerele complexe $z = x + iy$, astfel încît $z^2 = a + bi$.

23. Să se determine numerele complexe z, care verifică relaţia:

$$z^4 + 3 - 4i = 0.$$

24. Să se arate că pentru ecuaţia de gradul al doilea $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, cu coeficienţi complecşi, rădăcinile sale sînt date de aceeaşi formulă ca şi în cazul ecuaţiei de gradul al doilea cu coeficienţi reali.

CAPITOLUL VII

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Dacă x și y satisfac relația $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, să se determine $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

2. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, să se arate că ecuația $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ nu are rădăcini reale.

3. Să se determine valorile parametrului m, astfel încît ecuația $x^2 - 6x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.

4. Să se determine două numere nenule, astfel încît suma, produsul și diferența pătratelor lor să fie egale.

5. Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuațiilor: $ax^2 + bx + c = 0$ și $cx^2 + bx + a = 0$.

6. Fără a rezolva ecuația, să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuației:

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

Indicație. Se notează $y = x^2 + 2x$.

7. Să se determine mulțimile A și B și numerele reale p și q știind că:

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x + p = 0\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + qx - 4 = 0\},$$
$$A \cup B = \{-2, -1, 1, 4\}.$$

Indicație. Se folosesc relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

8. Să se determine parametrul real m, astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m - 1)x + m + 2 = 0\} \cap [0, 1] \neq \emptyset.$$

Indicație. Punem $z = \frac{x - 1}{x - 0}$, unde 0 și 1 sînt capetele intervalului; obținem ecuația în z: $(m + 2)z^2 - 3(m + 1)z + 3m + 1 = 0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației în x și z_1, z_2 rădăcinile ecuației în z. Avem: a) $x_i \in (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i < 0$, $i = 1, 2$. b) $x_i \notin (0, 1)$ dacă și numai dacă $z_i > 0$, $i = 1, 2$.
Deci problema se reduce la studiul semnelor rădăcinilor ecuației în z.

9. Să se determine parametrul real m, astfel, încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid mx^2 + (m+1)x + m + 2 = 0\} \cap [-1, 1] = \emptyset.$$

10. Să se determine numerele reale a și b astfel încît

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2ax + b = 0\} \setminus \{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 + 2bx + a = 0\} = \emptyset.$$

11. Se consideră mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 3}{2x^2} \in \mathbf{Z} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbf{Z} \,\middle|\, \frac{x^{10} + 2}{3x^2} \in \mathbf{Z} \right\}$.

Să se arate că $A = B$.

12. Să se arate că funcția

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax^4 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

nu este injectivă.

Indicație. Se observă că ecuația $f(x) - c = 0$ are două rădăcini distincte.

13. Să se arate că dacă ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ și $x^2 + cx + d = 0$, $(a, b, c, d \in \mathbf{Z})$, au o rădăcină irațională comună, atunci $a = c$ și $b = d$.

14. Să se arate că numărul $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ este irațional.

15. Să se arate că numerele raționale $\frac{1}{n}$ și $\frac{m}{n}$, unde m și n sînt prime între ele, au același număr de cifre în perioadă.

Indicație. Fie $(n, 10) = 1$. Dacă k este cel mai mic exponent pentru care $10^k = n \cdot l + 1$, unde $l \in \mathbf{N}$, atunci k este numărul cifrelor din perioada fracției zecimale sub care se reprezintă numărul $\frac{1}{n}$. Din $10^k = n \cdot l + 1$, rezultă $m \cdot 10^k = mnl + m$ și reciproc.

16. Să se arate că orice număr prim cu 10, are un multiplu scris numai cu cifra 9.

Indicație. Fie $(n, 10) = 1$. Numărul $\frac{1}{n}$ se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple. Notînd cu P numărul reprezentat de perioada sa avem $\frac{1}{n} = \frac{P}{99 \ldots 9}$, de unde $n \cdot P = 99 \ldots 9$. Deducem de aici că dacă n este prim și cu 9, atunci el admite un multiplu scris numai cu cifra 1.

17. Să se arate că un număr rațional $\frac{m}{n}$, astfel încît n este prim cu m și cu 9, se reprezintă sub forma unei fracții zecimale a cărei perioadă reprezintă un număr multiplu de 9.

Indicație. Fie $\frac{m}{n}$, un astfel de număr rațional, care se reprezintă sub forma unei fracții zecimale periodice simple: $\frac{m}{n} = \frac{P}{99 \ldots 9}$. Cum n este prim cu 9, rezultă că P se divide cu 9. Dacă $\frac{m}{n}$ se reprezintă sub formă de fracție zecimală mixtă, avem $10^n \frac{m}{n} = k + \frac{P}{99 \ldots 9}$, unde k este întreg, iar n este numărul cifrelor dinaintea perioadei.

18. Să se arate că fracţiile

i) $0,a_1 00 a_2 0000 a_3 0 \ldots 0 a_n \underbrace{0 \ldots 0}_{2n \text{ ori}} a_{n+1} 0 \ldots,$

ii) $0,a_1 a_2 000 a_3 0 \ldots 0 a_n \underbrace{00 \ldots 000}_{n(1\cdot 2 \ldots n) - 1 \text{ ori}} a_{n+1} 0 \ldots$

unde $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ şi oricare ar fi $m \in \mathbf{N}$, există $n > m$, astfel incit $a_n \neq 0$, reprezintă numere iraţionale.

19. Să se găsească numerele raţionale $\frac{1}{x}$ şi $\frac{1}{y}$, a căror sumă este egală cu $0,(0043992)$.

20. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n, suma $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracţie periodică mixtă. La fel, pentru $\frac{n^2+1}{n(n^2-1)}$.

Indicaţie $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{3(n+1)^2 - 1}{n(n+1)\ (n+2)}$. Se observă că numitorul fracţiei este multiplu de 3, pe cînd numărătorul nu este multiplu de 3. Numitorul fracţiei adusă la forma ireductibilă are factorii 2 şi 3, de unde rezultă că fracţia se reprezintă printr-o fracţie periodică mixtă.

21. Fie ecuaţia $\sqrt{m} + x = \sqrt{n}$ $(m, n \in \mathbf{N})$. Să se arate dacă:
i) ecuaţia poate avea rădăcină iraţională;
ii) ecuaţia poate avea rădăcină raţională.

22. Fie a, b, c numere raţionale. Să se arate că $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0$ dacă şi numai dacă $a = b = c = 0$.

23. Dacă a, b, c sînt numere reale, să se arate că:
$\max(a, \min(b, c)) = \min(\max(a, b), \max(a, c))$,
$\min(a, \max(b, c)) = \max(\min(a, b), \min(a, c))$.

24. Să se determine minimul expresiilor
i) $E(a, b) = 2a^2 + 2b^2 + 4b - 1$;
ii) $E(a, b) = ab + a^2b^2 + 2$,
unde $a, b \in \mathbf{R}$.

25. Să se reprezinte grafic funcţiile:
i) $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = |x^2 - 4x + 1|$;
ii) $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = |-x^2 - 4x + 5|$.

26. Fie familia de funcţii de gradul al doilea

$$f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 1.$$

i) Să se arate că vîrfurile parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe dreapta $y = x - 2$.
ii) Ce porţiune din această dreaptă cuprinde vîrfurile parabolelor cu ramurile în sus.

27. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcţii.

Definim funcţiile $h_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, prin:

$$h_1(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ şi } h_2(x) = \min(f(x), g(x)).$$

i) Să se arate că dacă f şi g sînt strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe mulţimea $A \subseteq \mathbf{R}$, atunci h_1 şi h_2 sînt strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe aceeaşi mulţime.

ii) Să se reprezinte grafic funcţiile h_1 şi h_2, dacă:

a) $f(x) = 2x + 1$ şi $g(x) = x - 3$;

b) $f(x) = |2x - 1|$ şi $g(x) = |x + 3|$;

c) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ şi $g(x) = x + 3$.

28. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\left[\frac{x+1}{3}\right] = \frac{x-1}{2}$; b) $\frac{15x-7}{5} = \left[\frac{5+6x}{8}\right]$.

Indicaţie. a) După definiţia părţii întregi a unui număr avem

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} \leqslant \frac{x+1}{3} < \frac{x-1}{2} + 1, \\ \frac{x-1}{2} \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Din inegalităţile de mai sus,rezultă $x \in (-1, 5]$. Cum $\frac{x-1}{2} \in \mathbf{Z}$, avem $x \in \{1, 3, 5\}$.

b) La fel ca mai sus,avem:

$$\begin{cases} \frac{15x-7}{5} \leqslant \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-7}{5} + 1, \\ \frac{15x-7}{5} \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Rezultă $x \in \left\{\frac{7}{15}, \frac{4}{5}\right\}$.

29. Să se construiască de la mulţimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi în ea însăşi o funcţie injectivă care să nu fie surjectivă şi o funcţie surjectivă care să nu fie injectivă.

30. Fie $\mathbf{N}^*$ mulţimea numerelor naturale nenule. Să se dea exemplu de două funcţii f şi g de la $\mathbf{N}^*$ la $\mathbf{N}^*$ astfel încît $fg = 1_{\mathbf{N}^*}$, dar $gf \neq 1_{\mathbf{N}^*}$.

31. Să se determine numerele naturale x, y care verifică relaţia

$$x^2 - y^2 = 135.$$

32. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuaţiei

$$x^4 + y^4 + 2 = 4xy.$$

Indicaţie. Ecuaţia devine $(x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 = 0$, de unde

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy = 1. \end{cases}$$

33. Se consideră funcția f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dată prin

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ bx, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

a și b fiind numere reale. Să se studieze monotonia funcției f, după valorile lui a și b.

34. Se consideră funcția f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ bx, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

a și b fiind numere reale. Să se determine a și b astfel încît f să fie bijectivă și în acest caz să se determine inversa.

35. Cîte soluții în numere întregi nenegative are ecuația

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1\,960}?$$

36. Să se scrie în ordine crescătoare numerele:

$$\sqrt{3},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[6]{30}.$$

37. Să se scrie în ordine descrescătoare numerele:

$$\sqrt{6},\ \sqrt[4]{12},\ \sqrt[8]{72}.$$

38. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{\dfrac{18x}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x+2}{18x}} = 2\dfrac{2}{3}$;

b) $x^2 + 6x + \sqrt{x^2 + 6x} = 20$;

c) $x^2 + 4\sqrt{6 + x^2} + 1 = 0$; d) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{48}{x^2} = 10\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}\right)$.

Indicație. a) Se notează $y = \sqrt{\dfrac{18x}{x+2}}$; b) Se notează $\sqrt{x^2 + 6x} = y$; c) Se notează $\sqrt{6 + x^2} = y$; d) Se notează $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}$.

39. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$; b) $16x^4 - 625 = 0$;

c) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$; d) $9x^3 - 13x - 6 = 0$;

e) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) = b^4$.

Indicație. a) Se notează $y = \sqrt[4]{x}$; c) Avem $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24$; punem $y = x^2 + 3x$; d) $9x^3 - 4x = 9x + 6$, $x(3x - 2)(3x + 2) = 3(3x + 2)$; $(3x + 2)(3x^2 + 2x - 3) = 0$ etc.; e) Se notează $x + \dfrac{5}{2}a = y$.

40. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 - 8(x+3)\sqrt{x-1} + 22x - 7 = 0.$$

Indicaţie $x \geqslant 1$. Ecuaţia devine $(x + 3 - 4\sqrt{x-1})^2 = 0$.

41. Să se rezolve ecuaţiile:

i) $(a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}} = 0$;

ii) $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$;

iii) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$; iv) $\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 2$.

Indicaţie. iii) Se notează $u = \sqrt[4]{97-x}$, $v = \sqrt[4]{x}$ şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} u+v=5, \\ u^4+v^4=97. \end{cases}$$

42. Să se arate că

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4.$$

43. Să se rezolve inecuaţiile:

a) $\sqrt{2-x} > x$; b) $\sqrt{2-x} \leqslant x$.

44. Să se arate că cuburile a două numere complexe conjugate sînt de asemenea conjugate.

45. Să se arate că produsul oricăror două rădăcini ale ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$, este de asemenea o rădăcină a acestei ecuaţii.

46. Să se arate că modulul numărului complex $\frac{1+ai}{1-ai}$, pentru a număr real, este 1. Reciproc, să se arate că orice număr complex de modul 1, poate fi scris în mod unic sub forma precedentă. Dar dacă a este număr complex?

47. Să se determine x şi y, numere întregi, astfel încît

$$\begin{cases} x-y=48, \\ \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 18. \end{cases}$$

48. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|. \end{cases}$$

Indicaţie. Se foloseşte $y \geqslant 5$, după cum rezultă din a doua ecuaţie.

49. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8; \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ yx = 9; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 - xy + y^2 = 7; \end{cases}$ f) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = a + \dfrac{1}{a}, \\ \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{xy}{x-y} = b + \dfrac{1}{b}. \end{cases}$

Indicație. b) Se notează $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt[3]{x-y}$; e) Se folosește relația $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$; f) Se notează $u = \dfrac{x-y}{xy}$, $v = \dfrac{x+y}{xy}$.

50. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} x\sqrt{yz} = 4, \\ y\sqrt{xz} = 9, \\ z\sqrt{xy} = 16; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(x+y+z) = 20, \\ y(x+y+z) = 30, \\ z(x+y+z) = 50; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = a, \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b, \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c, \end{cases}$ (unde $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$); e) $\begin{cases} u + v = 2, \\ ux + vy = 1 \\ ux^2 + vy^2 = -1, \\ ux^3 + vy^3 = -5. \end{cases}$

RĂSPUNSURI ȘI INDICAȚII

Capitolul I

1. a) $\frac{m-1}{4}$; b) Dacă $m \neq -2$, atunci $x = \frac{4+m^2}{m+2}$; pentru $m = -2$, nu are rădăcini; d) Dacă $m \neq 1$ și $m \neq \frac{3}{4}$, atunci $x = \frac{1-2m}{m-1}$; pentru $m = 1$ și $m = \frac{3}{4}$ nu are rădăcini; e) Dacă $n = 0$ și $m = 1$, atunci x este oarecare; dacă $n = 0$ și $m \neq 1$, nu are rădăcini; pentru $n \neq 0$ și $m \neq -1$, $x = \frac{1-m}{n(m+1)}$; pentru $n \neq 0$ și $m = -1$, nu are rădăcini; h) $-2, \frac{4}{5}$; i) $x \in (-\infty, -10]$; j) $x \in [1, 3]$; k) -14, 14. **2.** c) Dacă $a > b$, atunci $x \in (-1, \infty)$; dacă $a < b$, atunci $x \in (-\infty, -1)$. d) Dacă $a > -2$, atunci $x > \frac{3-b}{a+2}$; dacă $a < -2$, atunci $x > \frac{3-b}{a+2}$; dacă $a = -2$ și $b > 3$, atunci x este oarecare; pentru $a = -2$ și $b \leqslant 3$, nu are soluții. e) Dacă $a > -1$, atunci $x > \frac{2}{(a+1)^2}$; dacă $a < -1$, atunci $x < \frac{2}{(a+1)^2}$. **3.** a) Trebuie ca $8 + 3x \geqslant 0$, de unde $x \geqslant -\frac{8}{3}$. d) $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. **4.** a) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{3}$; b) nu are rădăcini reale; d) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; f) 2; g) Pentru $m = -\frac{3}{2}$ nu are rădăcini; pentru $m \neq -\frac{3}{2}$, $x = 3 + m$. **5.** $\Delta = m^2 - 4$. Dacă $|m| = 2$, atunci $\Delta = 0$ și în acest caz ecuația are o rădăcină; dacă $|m| > 2$, atunci $\Delta > 0$ și în acest caz ecuația are două rădăcini distincte; dacă $|m| < 2$, nu are rădăcini. **6.** $m = 0$; $m < 0$; $m > 0$. **7.** $|m| \leqslant \frac{1}{4}$.

9. a) Avem $y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{p^2}{q} - 2$, $y_1y_2 = 1$. Ecuaţia este $m\left[y^2 - \left(\frac{p^2}{q} - 2\right)y + 1\right] = 0$, m fiind un număr real oarecare, nenul. **11.** a) $m < 0$; b) $m > 0$. **12.** c) $(2X - 3m)\ (X - 2\ m)$. **13.** $m = -2$. **15.** Punem $z = x - 1$ şi obţinem ecuaţia în z: $4mz^2 + 4z - (m - 1) = 0$. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuaţiei în x şi z_1, z_2 rădăcinile ecuaţiei în z. Avem că: a) $x_1, x_2 < 1$ dacă şi numai dacă $z_1, z_2 < 0$; b) $x_1, x_2 > 1$ dacă şi numai dacă $z_1, z_2 > 0$; c) $x_1 < 1$ şi $x_2 > 1$, dacă şi numai dacă $z_1 < 0$ şi $z_2 > 0$. Deci problema se reduce la studiul semnelor rădăcinilor ecuaţiei în z. **16.** a) Trebuie ca $\Delta = 0$, adică $m^2 - 144 = 0$; de unde $m_1 = -12$, $m_2 = 12$. **17.** a) $(x + 7)\ (2x + 3)\ (2x - 3) = 0$;
b) $(6x - 1)\ (x - 9\ (x + 9) = 0$; c) $(x + 3)\ (x - 4)\ (x + 4) = 0$.

Capitolul II

§ 2. Mulţimi

4. a) adevărată; b) adevărată; c) adevărată; d) adevărată; e) falsă; f) falsă; g) falsă; h) falsă; i) adevărată; j) falsă. **6.** a) $A = \{0, 2, 3\}$; b) $B = \{1, 7\}$; c) $C = \{2, 4\}$. **7.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 11\}$; $A \cap B = \{2, 3\}$; $A - B = \{1, 4\}$. **10.** $m = 3$, $m = 4$. **11.** $m \in \mathbf{R} - \{-4, 2\}$. **12.** $m = \frac{3}{2}$. **15.** $C_{\mathbf{R}}A = \mathbf{R}$.
16. Submulţimile lui $A = \{1, 2, 3\})$ sînt: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$. **17.** i) $1, a \in D(a)$; ii) $a =$ număr prim; iii) dacă a este de forma $a = p^3$, unde p este număr prim sau de forma pq, unde p şi q sînt numere prime diferite; iv) $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$, $D(160) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80, 160\}$. **18.** $m = \pm 3$. A are 2 elemente cînd $m = \pm 2\sqrt{2}$. **19.** Dacă $x \in A_k$, oricare ar fi $k \geqslant 1$, atunci $x = a + r_1m_1 = a + r_2m_2 = a + r_3m_3 = \ldots$ Se obţine $m_1 > m_2 > m_3\ldots$, contradicţie cu faptul că există doar un număr finit de numere naturale mai mici ca m_1.

§ 3. Funcţii

1. $f(-2) = -10$; $f(-1) = f(2) = -7$; $f(4) = -10$, **2.** Se verifică faptul că: $g(1) = f(1)$, $g(2) = f(2)$, $g(3) = f(3)$, $g(4) = f(4)$. **3.** Nu. **4.** Se pot defini patru funcţii. **5.** $f(-12) = 0$, $f(-9) = 3$, $f(3) = 3$, $f(9) = 3$, $f(272) = 2$. **6.** Trebuie

ca numerele $1 + m$, $4 + m$, $9 + m$ să aparţină mulţimii $\{1, 2, 3\}$. Nu există nici un număr întreg m. **9.** Funcţia nu este nici injectivă şi nici surjectivă. **12.** Există 6 funcţii injective. Nu există funcţii surjective. **13.** f_2, f_5, f_6, sînt injective; nici una din funcţiile date nu este surjectivă. **14.** f(Galaţi) = = Galaţi, f(Făgăraş) = Braşov, g(Teleorman) = Alexandria, g(Mehedinţi) = = Drobeta Turnu-Severin. **15.** $(g \circ f)(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 3$; $(f \circ g)(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$. **16.** Pentru $x \leqslant 0$, avem $f(x) \leqslant -2$ şi deci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = (2x - 3)^2$. Pentru $x > 0$, avem $f(x) > 0$ şi deci $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 14x - 1$. Pentru $x \leqslant -2$, avem $g(x) = x^2 > 0$ şi deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7x^2$. Pentru $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right]$, avem $g(x) = 2x - 1 \leqslant 0$ şi deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 3 = 2(2x - 1) - 3 = 4x - 5$. Pentru $x > \frac{1}{2}$, avem $g(x) > 0$ şi deci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 7g(x) = 7(2x - 1) = 14x - 7$. Deci

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (2x - 3)^2, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ 14x - 1, & \text{dacă } x > 0; \end{cases} \qquad (f \circ g)(x) = \begin{cases} 7x^2, & \text{dacă } x \leqslant -2, \\ 4x - 5, & \text{dacă } -2 < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 14x - 7, & \text{dacă } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

19. 6 funcţii bijective. **20.** $f(1) = 7$, $f(2) = 9$, $f(3) = 3$, $f(4) = 1$, $f(5) = 7$, $f(6) = 9$, $f(7) = 3$. În general, $f(4k) = 1$, $f(4k + 1) = 7$, $f(4k + 2) = 9$, $f(4k + 3) = 3$. **22.** h şi k nu sînt nici injective şi nici surjective; $f^{-1}(x) = -x + 4$; $g^{-1}(x) = x - 1$. **23.** Se verifică că $f \circ f^{-1} = 1_N$ şi deci $f^{-1} = f$. **24.** Inversa este

$$f^{-1} : R \to R, \; f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \geqslant 0, \\ \frac{1}{3}x, & x < 0. \end{cases}$$

Capitolul III

1. a) 3,000...; c) 0,25000...; d) 0,000...; e) $\overline{1}$,75000...; g) $\overline{\overline{3}}$,(36). **2.** a) $\frac{1201}{900}$; b) $\frac{7}{9}$. **3.** $-1,3 = -\frac{13}{10} = \frac{-13}{10}$; $3,75 = \frac{375}{100}$. Celelalte numere sînt iraţionale; pentru demonstraţie a se vedea § 2. **4.** a) 4; 9; 144; 1 024. b) 2; 3; 7; 1001. **6.** a) 3,43479... < 3,43497 ...; e) − 5,4833... > −5,5829 ... .

7. i) a) $2{,}2 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}3$; b) $-2{,}3 \leqslant -\sqrt{5} < -2{,}2$; c) $1{,}5 \leqslant \frac{11}{7} < 1{,}6$; d) $-1{,}6 \leqslant \frac{11}{7} < -1{,}5$. ii) a) $2 \leqslant \sqrt{5} < 3$; $2{,}2 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}3$; $2{,}23 \leqslant \sqrt{5} < 2{,}24$; c) $1 \leqslant \frac{11}{7} < 2$; $1{,}5 \leqslant \frac{11}{7} < 1{,}6$; $1{,}57 \leqslant \frac{11}{7} < 1{,}58$. **8.** $x + y = 0{,}144...$. **9.** $xy = 3{,}31...$. **10.** a) $2{,}0653...$; b) $3{,}1462...$. **11.** a) $1{,}322...$; $3{,}741...$. **12.** a) Alegînd o unitate de măsură de lungime 1, am construit pe $\sqrt{2}$ precum şi orice segment avînd lungimea un număr întreg. Folosind teorema lui Pitagora putem construi segmentele de lungimea cerută. Pentru aceasta observăm că: $(\sqrt{3})^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2$; $(\sqrt{6})^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2$; $(\sqrt{10})^2 = 1^2 + 3^2$. Astfel $\sqrt{3}$ este ipotenuza triunghiului dreptunghic avînd catetele de lungime 1 şi $\sqrt{2}$ ş.a.m.d. b) Punctele care au abscisele $\sqrt{3}$ şi $-\sqrt{3}$ sînt simetrice faţă de origine ş.a.m.d. **13.** Dacă $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ar fi raţional, atunci şi $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ ar fi raţional, de unde $\sqrt{6}$ ar fi raţional. Dar cum $\sqrt{6}$ nu este raţional (demonstraţia este analoagă aceleia pe care am dat-o pentru $\sqrt{2}$), avem de-a face cu o contradicţie. Cum $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este iraţional, iar $\sqrt{2} - \sqrt{3} = -\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, rezultă că şi $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ este iraţional. **14.** Avem $a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2}$, $b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2}$, $ab = \frac{(a + b)^2 - a^2 - b^2}{2}$. Cum $a + b$ şi $a - b$ sînt raţionale rezultă că şi a, b şi ab sînt raţionale. **15.** Dacă unul din $a + b\sqrt{2}$ sau $a - b\sqrt{2}$ sînt egale cu zero, atunci $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = 0$, de unde $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Cum $\frac{a}{b}$ este raţional această relaţie nu este posibilă. Altă soluţie poate fi dată observînd că $a \in \mathbf{Q}$, iar $b\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$, şi deci suma lor nu poate fi număr raţional. **16.** Nu **17.** De exemplu, $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$.

Capitolul IV

1. Dacă $f = g$, atunci $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, $f(-1) = g(-1)$; de unde rezultă $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. **2.** a) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{43}{4}$; b) $-2\left(x + \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{57}{8}$; c) $3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$; d) $0{,}51\left(x - \frac{5}{51}\right)^2 + \frac{203}{204}$; e) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{36}$;

f) $-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{28}{25}$. **4.** a) $y_{min}=9$; b) $y_{max}=-11$; c) $y_{min}=-5$; d) $y_{max}=\frac{913}{48}$; e) $y_{max}=2$; f) $y_{min}=\frac{-111}{200}$. **5.** a) Pentru $x\in(-\infty, 1]$, funcția este strict descrescătoare, iar pentru $x\in[1,\infty)$ funcția este strict crescătoare. d) Pentru $x\in\left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$, funcția este strict crescătoare, iar pentru $x\in\left[\frac{5}{3},\infty\right)$ funcția este strict descrescătoare. **6.** a) $x\in(-\infty, -1]\cup[3,\infty)\Rightarrow f(x)\geqslant 0$; $x\in(-1, 3)\Rightarrow f(x)<0$; d) $x\in\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]\cup[1,\infty)\Rightarrow f(x)\leqslant 0$; $x\in\left(-\frac{1}{2}, 1\right)\Rightarrow f(x)>0$. Se folosește reprezentarea grafică a funcției. **9.** $f(x)=x^2+x-10$. **10.** $f(x)=-5x^2+10x-3$. **11.** Vîrful parabolelor, $V(x, y)$, are coordonatele: $x=m-1$, $y=-m^2+3m-3$. Eliminînd pe m se obține $y=-x^2+x-1$. **12.** Se rezolvă sistemul: $a-b+c=13$, $4a+2b+c=10$, $4ac-b^2=36a$. Se obțin funcțiile: $f(x)=\frac{1}{9}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{106}{9}$, $f(x)=x^2-2x+10$. **13.** a) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(1,\infty)$; b) $x\in(-\infty, 3-\sqrt{7}]\cup[3+\sqrt{7},\infty)$; d) $x\in\left(-\infty,\frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{-3+\sqrt{57}}{4},\infty\right)$; e) $x\notin\mathbf{R}$; h) $x\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$; i) $x\in(0, 4)$; j) $x\in\left[0,\frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2},\infty\right)$; l) $x\in\left(-\infty,\frac{11-\sqrt{105}}{2}\right)\cup\left(\frac{11+\sqrt{105}}{2},\infty\right)$. **14.** Se pun condițiile: $m-1>0$, $\Delta<0$ și se obține $m\in\left(\frac{5}{3},\infty\right)$. **15.** Se pun condițiile: $m<0$ și $\Delta<0$. **16.** Se rezolvă inecuația $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$. **17.** Pentru ca fracția E să aibă sens pentru orice x real, trebuie ca discriminantul ecuației $x^2+x+m=0$ să fie negativ, adică $1-4m<0$. Apoi din condiția ca $x^2+(m+1)x+m+2>0$, oricare ar fi x real, se obține că $m\in\left(\frac{1}{4}, 1+2\sqrt{2}\right)$. **18.** a) $x\in[-4, 1)\cup(2, 3]$; b) $x\in(2,3]$; f) $x\in\left[-5,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5}, 5\right]$. **19.** a) $x_V=-\frac{m+1}{m}$, $y_V=-\frac{1}{m}$, de unde $-mx_V=m+1$, sau $m=-\frac{1}{1+x_V}$, deci $y_V=x_V+1$; b) $AB=|x_2-x_1|=\frac{2}{|m|}$, $FV=\left|-\frac{1}{m}\right|=\frac{1}{|m|}$. Deci $AB=2\ FV$; c) Punctul fix este $(-1, 0)$. **20.** a) $\mathrm{Im}f=[0,+\infty)$; b) $\mathrm{Im}f=[1,+\infty)$; c) $\mathrm{Im}f=\left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3},\frac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$; e) $\mathrm{Im}f=\left[-\frac{1}{8},+\infty\right)$; f) $\mathrm{Im}f=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

21. a) $\left\{(3,1);\left(-4,-\frac{11}{3}\right)\right\}$; b) $\left\{(2,9);\left(-\frac{10}{3},\frac{11}{3}\right)\right\}$; c) $\left\{(2,1);-\frac{27}{23},-\frac{29}{23}\right)\right\}$. **22.** a) $\left\{(2,1);(-2,-1);\left(\frac{-3\sqrt{5}}{2},\frac{7}{2\sqrt{5}}\right);\left(\frac{3\sqrt{5}}{2},\frac{-7}{2\sqrt{5}}\right)\right\}$; b) $\{(2,1);(-1,-2);(1,2);(-2,-1)\}$; c) $\{(20,5);(-20,-5)\}$; d) $\{(-3,2);(3,-2)\}$. **23.** a) $\{(1,5);(5,1)\}$; b) $\{(1,5);(5,1);(2,3);(3,2)\}$; c) $\{(2,2);(-1\pm\sqrt{3},-1\pm\sqrt{3})\}$; d) $\{(0,1);(1,0)\}$; e) $\{(2,3);(-2,-3);(3,2);(-3,-2)\}$; f) $\{(3,1);(1,3)\}$. **24.** Dacă se notează $AM=x$ și cu S aria cuprinsă între cele trei cercuri se obține $S=\frac{\pi}{2}(-x^2+2ax)$. Maximul lui S are loc cînd $x=a$. **25.** Notăm $NP=MQ=x$ și cu S aria dreptunghiului. Dacă $[AD]$ este înălțimea din A pe ipotenuză, atunci din asemănarea triunghiurilor AMN și ABC obținem $\frac{MN}{BC}=\frac{AD-x}{AD}$. Cum $AD\cdot BC=AB\cdot AC$, atunci $AD=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ și deci $MN=\frac{BC}{AD}(AD-x)=\frac{a^2+b^2}{ab}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}-x\right)$. Dar $S=MN\cdot x=\frac{a^2+b^2}{ab}\left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}-x\right)x$. Se obține o funcție de gradul al doilea în x. **26.** Notăm $AD=a$, $AC=x$, $DC=y$. Dacă E este proiecția lui D pe $[AB]$, vom nota $DE=b$. Avem $x=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{y^2-b^2}$. Timpul total pe care îl face călătorul este $\frac{x}{v_1}+\frac{y}{v_2}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{v_1}-\frac{\sqrt{y^2-b^2}}{v_1}+\frac{y}{v_2}$. Timpul este minim dacă cantitatea $m=\frac{y}{v_2}-\frac{\sqrt{y^2-b^2}}{v_1}$ este minimă. Eliminînd radicalul obținem ecuația de gradul al doilea în y: $(v_1^2-v_2^2)y^2-2v_1^2v_2my+(v_1^2m^2+b^2)v_2^2=0$. Se pune condiția ca discriminantul acestei ecuații să fie pozitiv și se obține că $m\geqslant\frac{b\sqrt{v_1^2-v_2^2}}{v_1v_2}$. Deci timpul minim este $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{v_1}+\frac{b\sqrt{v_1^2-v_2^2}}{v_1v_2}$. **27.** Dacă x și y sînt laturile dreptunghiului iar R raza cercului atunci $x^2+y^2=4R^2$. Dacă S este aria dreptunghiului avem $S=xy$. S este maxim cînd $S^2=x^2y^2=x^2(4R^2-x^2)$ este minimă. Notînd $x^2=z$ se obține o funcție de gradul al doilea. **28.** Dacă R este raza cercului și x, y

semibazele trapezului avem că perimetrul este $4(x + y)$. Se arată că $xy = R^2$ şi deci avem minim pentru perimetru cînd $x = y = R$. **29.** Fie x, y proiecţiile catetelor pe ipotenuză. Avem sistemul de ecuaţii $x + y = a$ şi $xy = h^2$. **30.** Fie x, y catetele triunghiului. Avem sistemul de ecuaţii $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2p$ şi $xy = h\sqrt{x^2 + y^2}$. **31.** Se ia ca necunoscută semibaza inferioară. Înălţimea trapezului este $\sqrt{R^2 - x^2}$. Laturile neparalele ale trapezului au lungimile egale cu $\sqrt{2R^2 - 2Rx}$. Se obţine ecuaţia $2x + 2R + 2\sqrt{2R^2 - 2Rx} = 2p$. **32.** Se iau ca necunoscute x, y semibazele trapezului. Se obţine sistemul $xy = R^2$, $R(x + y) = 2R^2$. **33.** Fie $AD = x$, $DC = y$. Se obţine sistemul $ax + by = 2k^2$, $x^2 + a^2 = y^2 + b^2$. **34.** Dacă x, y reprezintă numărul de ore necesare primei brigăzi, respectiv celei de-a doua brigăzi, pentru terminarea întregii lucrări, obţinem sistemul $\frac{x}{3y} + \frac{y}{3x} = \frac{13}{18}$; $\frac{18}{5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$. Se obţine $x = 9$, $y = 6$. **35.** Laturile dreptunghiului sînt 80 m şi 60 m.

Capitolul V

§ 1. Puteri

1. a) 16; b) 15^3; c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$; d) $-\frac{1}{5^3}$. **2.** a) $m < 1$, este pozitivă; $m = 1$, este zero; $m > 1$, este negativă; b) $m < \frac{2}{3}$, este pozitivă; $m = \frac{2}{3}$, este zero; $m > \frac{2}{3}$, este negativă; c) este pozitivă oricare ar fi $m \neq \frac{1}{2}$. Pentru $m = \frac{1}{2}$, este zero. **3.** a) xy^3; b) $(a + b)^2$; c) 2^n. **4.** se calculează membrul drept. **5.** Se descompune în factori $a^{32} - b^{32} = (a^{16})^2 - (b^{16})^2$. **6.** a) $(x^{m+n} + 1)(x^{m-n} + 1)$; b) 0. **7.** a) 2^8; b) 9^6; c) sînt egale; d) $4^{300} = (4^3)^{100}$ şi $3^{400} = (3^4)^{100}$, $4^3 < 3^4$, 3^{400} este mai mare; e) $\left(-\frac{1}{32}\right)^3$; f) $\left(\frac{1}{16}\right)^{100}$. **9.** Se foloseşte reprezentarea grafică. **10.** Este strict crescătoare. **11.** a) $a^{-3}b^{-4}$; $(a + b)^{-5}(a - b)^{-2}$; $3a^{-5}b^{-6}c^{-2}$; b) $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-6}$; $15 \cdot 10^{-4}$; **12.** a) $a^{-4}(1 + a^2) \cdot (a^6 + a^2 - 1)$; b) $4a^{-2}$; c) 1.

§ 2. Radicali

1. a) $|x-1|$; d) $|-3x^2+x-1| = 3x^2-x+1$. **2.** $7-2x$ pentru $x \in (-\infty, 2)$; 3 pentru $x \in [2, 5]$; $2x-7$ pentru $x \in (5, \infty)$. **3.** Conform problemei precedente, avem $f(x) = 7-2x$, $x \in (-\infty, 2)$; $f(x) = 3$, $x \in [2, 5]$; $f(x) = 2x-7$, $x \in (5, \infty)$. **4.** a) $x \in [2, \infty)$; b) mulţimea tuturor numerelor reale; c) $x \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$; d) $x \in [1, \infty)$. **7.** a) $\sqrt{|x^2-1|}$; b) $\sqrt{x^2-x+1}$. **8.** a) $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$; c) $4\sqrt[3]{2} > 3\sqrt[3]{4}$. **9.** b) $\sqrt[20]{2^7}$; d) $\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}}$. **10.** c) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}$; d) 8. **11.** c) $2(2\sqrt{2}+\sqrt{10}-\sqrt{5}-1)$; d) $\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49})$. **12.** i) $\sqrt{a}-\sqrt[21]{a^5}$; ii) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$. **13.** b) 3, 4; d) 12; e) 4, -5; f) 4; g) 0, 5; h) $-a$, a; i) 7. **15.** c) $1 < \sqrt{2} = \sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$. **17.** a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; c) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$. **18.** Se scrie $x+2\sqrt{x-1}$ sub forma $x-1+2\sqrt{x-1}+1 = (\sqrt{x-1}+1)^2$. Analog, se procedează cu $x-2\sqrt{x-1}$. **19.** 0,1. **20.** $\frac{1}{243}$.

Capitolul VI

1. a) $x = \frac{11}{7}$, $y = -\frac{2}{17}$; b) $x = t$, $y = \frac{2}{3}(4-t)$, unde t este un număr real oarecare; c) $x = -\frac{92}{77}$, $y = -\frac{194}{77}$; d) $x = 0$, $y = 7$. **2.** a) $8-i$; d) $6\sqrt{2}+7i$; e) 5. **3.** c) $\frac{i\sqrt{3}-1}{2}$; d) i; f) $-1-i$; g) $2a$; h) 1. **6.** c) 0, dacă $n = 4k$; i, dacă $n = 4k+1$; $i-1$, dacă $n = 4k+2$; -1, dacă $n = 4k+3$; d) -1; f) $4i-3$. **7.** a) $m = -2$; b) $m = -\frac{5}{2}$; c) $m \neq -2$ sau $m \neq -\frac{5}{2}$ **8.** a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; b) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}$. **11.** a) $(X-1-i)(X-1+i)$; b) $(2X+1-2i)(2X+1+2i)$. **12.** a) $x_1 = 3-6i$, $y_1 = 3+6i$; $x_2 = 3+6i$, $y_2 = 3-6i$. **14.** a) $m(x^2+20x+200) = 0$, $m \in \mathbf{R}$; b) $m(2x^2-14x+205) = 0$. **15.** a) Scriem $x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9) = 0$ şi se obţin rădăcinile: $3, -\frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i)$. Avem $x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9) = 0$; se obţin rădăcinile: $-3, \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i)$;

d) $-\sqrt[3]{5}$, $\frac{\sqrt[3]{5}}{2}(1 \pm \sqrt{3}\,i)$. e) Scriem $x^4 - 16 = (x+2)(x-2)(x^2+4)$, de unde rezultă rădăcinile: -2, 2, $-2i$, $2i$; f) Avem $x^4 + 16 = (x^2+4)^2 - 8x^2 = (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) = 0$. Rădăcinile ecuației sînt: $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; g) $-\frac{\sqrt[4]{12}(1 \pm i)}{2}$, $\frac{\sqrt[4]{12}(1 \pm i)}{2}$. **16.** a) 0; b) 0. **17.** a) $x_1x_2x_3 = 6$; b) $x_1x_2x_3x_4 = 7$. **20.** a) Punctele se află pe parabola $y = -x^2 + 10$; b) Punctele se află pe dreapta $y = 1 - x$. **21.** b) $\{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (2, 1), (2, -1)\}$. c) $\{(7, 3), (-7, -3)\}$. **22.** Pentru $b > 0$, $x + yi = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$; pentru $b < 0$, $x + yi = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$. **23.** Se notează $z^2 = y$ și se are în vedere problema precedentă.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Becheanu, V. Căzănescu, C. Năstăsescu, S. Rudeanu: *Logică matematică și teoria mulțimilor* (manual pentru anul II liceu, clase speciale de matematică), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
2. *Algebră și elemente de analiză* (manual pentru cl. a IX-a, școli medii, din U.R.S.S., sub redacția A.N. Kolmogorov), Moscova, 1976.
3. Gh. Dumitrescu, *Manual de algebră,* pentru cl. a IX-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963.
4. I.S. Gradstein, *Teorema directă și reciprocă*, Editura Tehnică, 1960 (traducere din lb. rusă).
5. Ion Ionescu, *Maxime și minime geometrice*, Editura Tehnică, București, 1955.
6. F. Speranza, *Relații și structuri*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1975 (traducere din lb. italiană).
6. I. Stamate și I. Stoian, Culegere de probleme de Algebră (pentru licee), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.

CUPRINS

